

# Série 16

Pour le 22 janvier 2025

## Exercice 1

Calcule dans chacun des cas suivants la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et justifie ta réponse en donnant une base.

- a)  $V = M_2(\mathbb{C})$ ;
- b)  $V$  est l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré  $\leq 3$  qui s'annulent en 1 et en 7;
- c)  $V = \mathbb{C}^5$ ;
- d)  $V = \mathbb{C}[x]$ ;
- e)  $V$  est le sous-espace de  $\mathbb{C}^3$  des triplets  $(z; z'; z'')$  qui vérifient l'équation  $z + z' + z'' = 0$ ;
- f)  $V$  est l'ensemble de toutes les applications linéaires  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ;

## Exercice 2

On définit l'application *trace*  $\text{Tr} : M_2(K) \rightarrow K$  de la façon suivante :

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

- a) Montre que la trace est linéaire;
- b) Trouve une base de  $\ker \text{Tr}$ ;
- c) Trouve une base de  $\text{Im} \text{Tr}$ .

**Exercice 3**

Détermine dans chacun des cas suivants si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est une application ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ -) linéaire.

- a)  $f(z) = \bar{z}$ ;
- b)  $f(z) = |z|$ ;
- c)  $f(z) = az + b$  avec  $a, b \in \mathbb{C}$ ;
- d)  $f(z) = z^2$ ;
- e)  $f(z) = e^z$ .

**Exercice 4**

Soient  $L$  et  $M$  les sous-espaces suivants de  $\mathbb{R}^4$  :

$$L = \langle (0; 0; 1; 2), (4; 2; 1; 2), (-6; -3; 2; 4) \rangle$$

$$M = \langle (3; 5; 5; 3), (2; 3; 3; 2), (-1; 1; 1; -1) \rangle$$

Trouve une base de  $L$ , de  $M$ , de  $L \cap M$  et de  $L + M$ . Donne les dimensions de chacun de ces sous-espaces et utilise la formule qui permet de calculer la dimension de  $L + M$  pour contrôler ta réponse.

**Exercice 5**

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Une application d'anneaux  $f : A \rightarrow B$  telle que  $f(ab) = f(a)f(b)$  et  $f(a + b) = f(a) + f(b)$  est un homomorphisme d'anneaux.
- b) Il n'y a qu'un homomorphisme d'anneaux de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ .
- c) Si  $\dim V > \dim W$ , alors  $f : V \rightarrow W$  ne peut être injective.
- d) Il y a une infinité d'applications  $K$ -linéaires de  $K$  dans  $K$  pour certains corps.
- e) Il y a une infinité d'applications  $K$ -linéaires de  $K$  dans  $K$  pour tous les corps.
- f) La dimension de l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires  $\mathcal{L}(V, W)$  est finie pour tout  $V$  et tout  $W$ .

**Exercice 6**

On définit l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  par  $f(x, y, z) = (x - 2y, 6y - 3x)$ .

- Montre que  $f$  est linéaire ;
- Trouve une base de  $\ker f$  ;
- Trouve une base de  $\text{Im} f$ .

**Exercice 7**

Trouve un isomorphisme entre  $\mathbb{C}$  et le sous-anneau de  $M_2(\mathbb{R})$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

**Exercices théoriques****Exercice 8**

**Les polynômes.** Soit  $K$  un corps. Nous travaillons avec l'ensemble  $V = K[x]$  de tous les polynômes à coefficients dans  $K$ .

- Montre que  $K[x]$  est un  $K$ -espace vectoriel. Donne la forme explicite de l'addition et de l'action.
- Montre que l'ensemble  $K[x]^{\leq n}$  de tous les polynômes de degré  $\leq n$  est un sous-espace vectoriel de  $K[x]$ .
- Trouve une base de  $K[x]^{\leq 4}$ . Existe-il une base où aucun polynôme n'est de degré 3 ?
- L'ensemble des polynômes de la forme  $ax^2 + bx^7$  avec  $a, b \in K$  est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, trouves-en une base.
- L'ensemble des polynômes de degré pair est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, trouves-en une base.
- L'ensemble des polynômes de la forme  $x^2p(x)$  avec  $p(x) \in K[x]$  est-il un sous-espace ? Si oui, trouves-en une base.

**Exercice 9**

**Projecteurs.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel. Une application linéaire  $p : V \rightarrow V$  est un projecteur si  $p \circ p = p$ .

- a) Montre que la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  sur une droite passant par l'origine est un projecteur.
- b) Montre que  $\ker p \oplus \text{Imp} = V$  pour tout projecteur  $p$ .
- c) Donne une description explicite de cette somme directe dans le cas de la projection orthogonale sur la droite  $x = y$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 10**

Si  $V$  est de dimension finie  $n$ , montre que toute famille de  $n$  vecteurs linéairement indépendants forme une base de  $V$ .

**Exercice 11**

Soit  $\alpha : V \rightarrow W$  une application linéaire et  $U \subset V$  un sous-espace. Montre que  $\alpha(U)$  est un sous-espace de  $W$ .

**Exercice 12**

**Espace dual.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel. L'espace dual  $V^* = \mathcal{L}(V, K)$  est l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de  $V$  dans  $K$ .

- a) Lorsque  $\dim V = n$ , calcule la dimension de  $V^*$  en explicitant une base.
- b) Lorsque  $V = \mathbb{R}$ , montre que  $V^*$  est formé de toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme  $f(v) = av$  pour un certain nombre réel  $a$ .
- c) Lorsque  $V = \mathbb{R}^2$ , trouve une application telle que  $f(av) = af(v)$  pour tout  $v$  et pour tout  $a$ , mais qui n'est pas linéaire.