Série 15

Pour le 8 janvier 2025

Exercice 1

Détermine dans chacun des cas suivants si l'ensemble V considéré est un K-espace vectoriel.

a) $V = M_2(\mathbb{R})$ et $K = \mathbb{R}$;

b) V est le cercle de rayon 1 dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et $K = \mathbb{C}$;

c) $V = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{C}$;

d) $V = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{R}$;

e) $V = \mathbb{F}_p[x]$ l'ensemble des polynômes $a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$ avec les coefficients $a_i \in K = \mathbb{F}_p$;

f) V est l'ensemble de toutes les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f'(0) = 1$ et $K = \mathbb{R}$;

g) V est l'ensemble de toutes les suites convergentes de nombres réels et $K = \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient $V_1, \dots, V_n$ des K-espaces vectoriels. Construis une structure de K-espace vectoriel sur le produit $V_1 \times \cdots \times V_n$. Lorsque $n = 3$ et $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{F}_2$, dessine l'espace vectoriel produit $V_1 \times V_2 \times V_3$.

Exercice 3

Détermine dans chacun des cas suivants si W est un sous-espace de V.

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et W est l'ensemble de toutes les fonctions dérivables en tout point.

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et W est l'ensemble de toutes les fonctions f telles que $f(\pi) = e$.

c) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et W est l'ensemble de toutes les fonctions f bornées (il existe une constante c telle que $|f(x)| < c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

d) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ et W est le sous-ensemble de tous les triples (x, y, z) tels que $x + 2y + ez = 0$.

e) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ et W est le sous-ensemble de tous les triples (x, y, z) tels que $xyz = 0$.

Exercice 4

On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Décris l'action de $\mathbb{R}$ sur les nombres complexes. Montre que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel et trouve une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

b) Tous les espaces vectoriels réels ont un nombre infini d'éléments.

c) Un système de générateurs contient toujours une base.

d) Deux vecteurs x et y sont linéairement dépendants si et seulement si x est un multiple de y.

e) Trois vecteurs x, y et z de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants si et seulement ils engendrent un plan $W =< x, y, z >$.

Exercice 6

On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues. On définit $f_k(x) = \cos^k(x)$ et $g_k(x) = \cos(kx)$.

a) Montre que les fonctions $f_0, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendantes.

   Indication. Si $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, réfléchis aux propriétés du polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$.

b) Montre que les fonctions $g_0, \ldots, g_n$ sont linéairement indépendantes.

   Indication. Le faire par récurrence. Si on a la combinaison linéaire $\lambda_0 g_0 + \cdots + \lambda_n g_n = 0$, on peut dériver l'équation plusieurs fois, puis additionner les équations d'une manière astucieuse pour pouvoir utiliser le pas de récurrence.

Exercice 7

On travaille dans le $\mathbb{F}_7$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{F}_7)$ des matrices carrées deux fois deux à coefficients dans le corps à sept éléments. On considère les sous-ensembles U des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix}$ et W des matrices de la forme $\begin{pmatrix} u & 0 \\ w & u \end{pmatrix}$.

a) Montre que U, V et W sont des sous-espaces de $M_2(\mathbb{F}_7)$.

b) Trouve une base de chacun des trois sous-espaces.

c) Détermine les sous-espaces $U \cap V$, $U \cap W$ et $V \cap W$, ainsi qu'une base de chacun d'eux.

Exercice 8

Soient $U \subset V$ un sous-espace vectoriel. Détermine $U + U$.

Exercice 9

On considère dans $\mathbb{Q}^5$ le sous-espace des éléments $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5$ tels que $x_1 = 3x_2$ et $x_3 = 7x_4$. Trouve une base de ce sous-espace.

Exercices théoriques

Exercice 10

Multiples dans les K-espaces vectoriels. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in K$. On définit $n\lambda$ par récurrence. Pour $n = 0$, $0 \cdot \lambda = 0_K$. Puis $1 \cdot \lambda = \lambda$ et pour $n > 1$, $n\lambda = (n-1)\lambda + \lambda$. Enfin, si $n < 0$, alors $n\lambda = (-n)\lambda$. Soit V un K-espace vectoriel.

a) Définis soigneusement les multiples nv d'un élément $v \in V$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;

b) Montre que $(n\lambda)v = n(\lambda v)$ pour tout $v \in V$;

c) Montre que $\lambda(nv) = n(\lambda v)$ pour tout $v \in V$;

d) Quand est-ce que $nv = 0_V$? Pense au cas des corps $\mathbb{F}_p$ et à la caractéristique du corps K.

Exercice 11

La somme directe. Soit V un K-espace vectoriel, U et W des sous-espaces tels que $U + W = V$.

a) Montre que $U + W$ est une somme directe si et seulement si tout vecteur $x \in V$ s'écrit de manière *unique* $x = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$.

b) On considère dans $V = \mathbb{R}^3$ les sous-espaces $U_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, $U_3 = \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Montre que $U_1 + U_2 + U_3 = V$ et que $U_i \cap U_j = \{(0, 0, 0)\}$ si $i \neq j$.

c) Penses-tu que dans la partie précédente il s'agit d'une somme *directe* de trois sous-espaces vectoriels ?

Exercice 12

La somme directe, partie 2. Soit V un K-espace vectoriel, $U_1, \ldots, U_n$ des sous-espaces tels que $U_1 + \cdots + U_n = V$. On dit que cette somme est directe si tout vecteur v de V s'écrit de manière unique $v = u_1 + \cdots + u_n$ avec $u_i \in U_i$. On note alors $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

a) Montre que $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ si et seulement si $U_i \cap U_j = \{0_V\}$ si $i \neq j$ et de plus $(U_i + U_j) \cap U_k = \{0_V\}$ pour $i \neq j$ et $k \neq i, j$.

b) Montre que $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ si et seulement si on peut écrire 0_V de manière unique comme combinaison linéaire $0_V = u_1 + \cdots + u_n$ avec $u_i \in U_i$.

c) Réponds maintenant à la dernière question de l'exercice précédent.