VII. Optimisation et primitives

Nous revenons aujourd'hui sur les fonctions trigonométriques hyperboliques et parlerons de leurs réciproques dont vous avez vus quelques exemples en exercice dans la série précédente. Nous parlerons ensuite de problèmes d'optimisation, l'une des applications les plus pratiques de la théorie de la dérivation.

1 Fonctions hyperboliques réciproques

Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ces fonctions ont été étudiées en exercice la semaine passée et vous avez vu que

$$\sinh' x = \cosh(x) \qquad \text{et} \quad \cosh' x = \sinh(x)$$

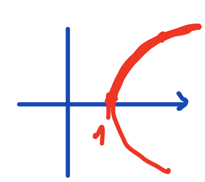
Dans la série ~~de la~~ d'une semaine passée, vous avez étudié la fonction réciproque de sinh, notée Argsinh. Vous avez entre autres dû montrer que $\text{Argsinh} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ et que $\text{Argsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Il reste donc à étudier la fonction Argcosh.

Définition 1.1. La fonction Argcosh : $[1, \infty[\to [0, \infty[$ est la fonction réciproque de cosh sur $[0, \infty[$.

$\cosh : [0;\infty[\to [1;\infty[$

Ainsi , $\text{Argcosh}(x) = y \iff x = \cosh(y)$

$\forall x \geq 1$ et $\forall y \geq 0$



Calculons la dérivée de cette fonction.

Proposition 1.2. *On a* $\text{Argcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

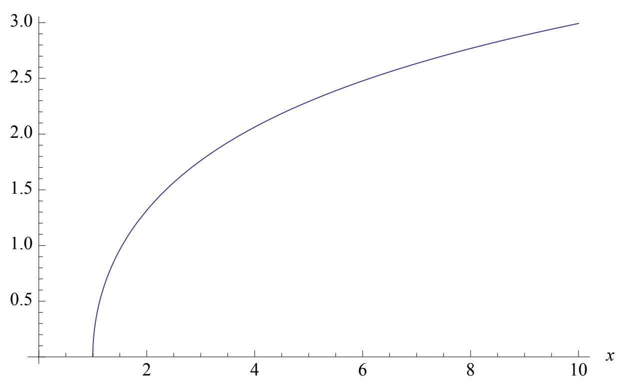
Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Ainsi, si $y = \text{Argcosh}(x)$, on a $\iff x = \cosh(y)$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \iff \sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$ ($+\sqrt{\ }$ car $\sinh(x) \geqslant 0$ car $x \geqslant 0$)

$$\text{Argcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(y)} = \frac{1}{\sinh(y)} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\cosh^2 y}_{x^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

□

On en déduit que la fonction Argcosh est strictement croissante. Voici son graphe :



De plus, on vérifie facilement que $\text{Arg}\cosh''(x) \leqslant 0$ donc Argcosh est concave.

Pour terminer, nous donnons la liste des dérivées de ces fonctions hyperboliques :

Proposition 1.3. *On a*

$\sinh' x = \cosh x$	$\text{Argsinh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh' x = \sinh x$	$\text{Argcosh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\text{Argtanh}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\coth' x = 1 - \coth^2 x = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$\text{Argcoth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$

Remarque 1.4. Comment se fait-il que la dérivée des réciproques de la tangente hyperbolique et celle de la cotangente hyperbolique soient égales ? Y aurait-il une faute de frappe ? NON !

Les ensembles de définition de argtanh et argcoth sont disjoints :

$D(\text{argtanh}) =]-1;1[$ alors que $D(\text{argcoth}) = \mathbb{R} - [-1;1]$.

L'expression algébrique des dérivées est la même, mais valable sur deux domaines disjoints. (cf. page 10, chap. Exp et log)

2 Optimisation

Les méthodes de dérivation et la connaissance de la croissance d'une fonction permettent souvent de résoudre de manière analytique des problèmes d'optimisation. La méthode consiste bien souvent à trouver en fonction du problème posé une fonction dont on cherchera le maximum ou le minimum. Commençons par un grand classique.

Exemple 2.1. La fabrique Bischofszell cherche à produire une boîte de conserve en fer blanc contenant un litre, soit 1000 cm^3, de petits pois en utilisant le moins de matière possible.
Quelles seront ses dimensions ?

Appelons r le rayon du disque de base et h la hauteur de la boîte, en centimètres.

La surface totale vaut $S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$, $h, r > 0$

Condition : $V = 1000 = \pi r^2 \cdot h \iff h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$

d'où $S(r) = 2 \cdot \pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$, mais les boîtes de conserve de rayon négatif n'intéressent pas Bischofzell. On restreint donc $D(S)$ à $\mathbb{R}_+^*$.
Calculons la dérivée de S :

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$$

$$S'(r) = 0 \iff r^3 = \frac{2000}{4\pi} = \frac{560}{\pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \simeq 5{,}42 \text{ cm.}$$

⚠ Il FAUT vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum de S, soit par une étude de signe de S' → croissance de S, soit avec S''.

x	0		$\sqrt[3]{\frac{560}{\pi}}$	
S'		$-$	0	$+$
S		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

ou

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \quad \forall r > 0$$

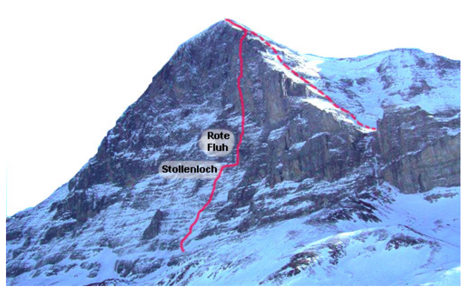
$\Rightarrow$ S est convexe $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ est un MIN

Il suffit maintenant de calculer h pour connaitre les dimensions de la boîte de petits pois :

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \cong 10{,}84 \text{ cm.}$$

Abordons maintenant un exemple de nature plus physique où nous nous intéresserons aussi à la dérivée seconde.

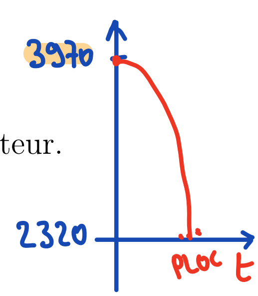
Exemple 2.2. On se trouve dans la face Nord de l'Eiger, de 1650 mètres de hauteur. Au moment d'arriver au sommet, à 3970 mètres d'altitude, un petit boulon d'un gramme se détache des crampons et tombe directement jusqu'au bas de la face.
A quel instant atteint-il une vitesse maximale ?



Nous devons d'abord établir l'équation de sa position $h(t)$, comprise entre 3970 et 2320. Idéalement, sans frottement,

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 3970$$

car la vitesse initiale est nulle et $g = 9{,}81 m/s^2$ est l'accélération de la pesanteur.



La formule $h(t)$ vient de : $a(t) = -g = v'(t)$
d'où $v(t) = -gt + v_0 = -gt$
Ici $v_0 = 0$

De même, $v(t) = h'(t)$ d'où $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 3970$
La vitesse $|-gt|$ est maximale lorsque t est maximale, i.e.
lorsque $h(t) = 2320$. On résout $-\frac{1}{2}gt^2 + 3970 = 2320$

Disons que $g = 10$ et donc $T^2 = \dfrac{1650}{5} = 330$ et $T \cong 18,1$ secondes.

A ce moment $|v(T)| = gT \cong 181$ m/s, autrement dit plus de 650 km/h.

En réalité, il faudrait tenir compte des frottements dû à la viscosité de l'air, à la forme du boulon...
et une vitesse limite < 181 m/s est atteinte avant l'impact.

3 Primitives

Nous savons tout, ou presque, sur la dérivation. Nous terminons ce cours avec une première approche de l'intégration, en étudiant la "réciproque de la dérivation", c'est-à-dire en cherchant pour une fonction donnée quelles fonctions admettent cette fonction pour dérivée.

Définition 3.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ ou plus généralement sur une partie de $\mathbb{R}$.
Une fonction dérivable F est une *primitive* de f sur $[a, b]$ si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Proposition 3.2. *Deux primitives d'une même fonction diffèrent par une constante.*

Démonstration.

Si F et G sont deux primitives de f sur $I = [a; b]$
Alors $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$
Ainsi $F - G = \text{constante}$
$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $F(x) = G(x) + c$, $\forall x \in I$.

□

Définition 3.3. Si f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, l'ensemble de toutes ses primitives se note $\int f(x)dx$ et on l'appelle *intégrale indéfinie* de f.

dx est un élément infinitésimal.
"dx" est INSECABLE !

Intégrer une fonction sur un intervalle, c'est chercher toutes ses primitives sur cet intervalle. Si F est une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$, toute primitive de f sur $[a, b]$ est de la forme $F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. On convient donc d'écrire

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.4. On sait qu'un corps tombe en chute libre avec une accélération constante g. Puisque l'accélération est la dérivée de la vitesse, on en déduit que la vitesse

$$v(t) = \int g \, dt = gt + v_0 \quad , \quad v_0 \in \mathbb{R}$$

où v_0 est une constante. Il s'agit de la "vitesse initiale" puisque

$v(0) = g \cdot 0 + v_0 = v_0$ donne la vitesse en $t=0$.

Pour trouver la position $x(t)$ de notre objet, il faut intégrer encore une fois car la vitesse est la dérivée de la position. Ainsi,

$$x(t) = \int v(t)\, dt = \int gt + v_0 \, dt = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0 \ , \ x_0 \in \mathbb{R}$$

où x_0 est une constante réelle. Cette constante représente la "position initiale" de l'objet.

Toutes les dérivées que nous avons calculées nous permettent de trouver de nombreuses primitives. Ainsi, le tableau suivant donne les primitives de quelques fonctions : puissances pour $\alpha \neq -1$, trigonométriques, exponentielles, etc. La lettre c indique une constante réelle dans tous les cas.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
e^x	$e^x + c$
a^x avec $a > 1$	$\frac{1}{\ln a} a^x + c$

car $\left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c\right)' = x^\alpha$

car $\left(\frac{1}{\ln(a)} e^{\ln(a)\cdot x} + c\right)'$

$= \frac{1}{\cancel{\ln(a)}} \cdot e^{\ln(a)\cdot x} \cdot \cancel{\ln(a)}$

$= a^x$ ✓

Voici ensuite les règles de base pour calculer les primitives de fonctions obtenues comme combinaisons linéaires de fonctions plus simples. La dernière partie résume les trois autres et nous apprend que le calcul de primitive est *linéaire* : la primitive d'une combinaison linéaire de fonctions est la combinaison linéaire des primitives de ces fonctions.

Proposition 3.5. *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

a) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

b) $\displaystyle\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$;

c) $\displaystyle\int (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int f(x)dx$;

d) $\displaystyle\int (\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$

Primitive ou Intégrale indéfinie sont identiques !

Démonstration.

On montre d) qui généralise a), b) et c)

Soit F et G, primitives respectives de f et g.

Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ car

$(\lambda F + \mu G)' = \lambda (F)' + \mu (G)' = \lambda f + \mu g$ (la dérivée est une opération linéaire, comme le calcul de limite)

Exemple 3.6. On cherche à trouver toutes les primitives de la fonction polynomiale

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Puisque ~~la~~ une primitive de x^k est de la forme $\frac{1}{k+1}x^{k+1}$, on déduit de la proposition ci-dessus que

$$\int p(x)dx = \int a_n x^n dx + \cdots \int a_1 x dx + \int a_0 dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + c$$

Par exemple,

$$\int (x+1)^2 dx = \int x^2 + 2x + 1 \; dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + c \;, \quad c \in \mathbb{R}$$

La règle de la dérivation d'une composition de fonctions implique le résultat suivant.

Proposition 3.7. *Soient f et g deux fonctions réelles. Alors, si G est une primitive de g,*

$$\int g(f(x))f'(x)dx = (G \circ f)(x) + c. \quad = G\big(f(x)\big) + c$$

Démonstration. Il suffit de constater que $G \circ f$ est une primitive de $(g \circ f) \cdot f'$. □

Un cas particulier très utile de cette règle est celui où G est une fonction puissance.

Corollaire 3.8. *Soient f une fonction réelle et k un entier positif. Alors*

$$\int f^k(x) \cdot f'(x)dx = \frac{1}{k+1} f^{k+1}(x) + c \ , \quad c \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.9. La fonction $\cos^3 x \cdot \sin x$ admet comme primitive

$$-\int \cos^3 x\,(-\sin x)dx = -\frac{\cos^4(x)}{4} + c$$

$$\int (x^2+8)^{25} \cdot 2x \, dx = \frac{(x^2+8)^{26}}{26} + c$$

On peut aussi recalculer sans développer l'exemple polynomial de tout à l'heure :

$$\int (x+1)^2 dx = \int (x+1)^2 \cdot 1 \, dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 + c$$

Mais, $\frac{1}{3}(x+1)^3 + c = \frac{1}{3}\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) + c$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \underbrace{\frac{1}{3} + c}_{\tilde{c}}$$

Ce qui correspond bien au même résultat qu'à la page 7.

· Pour la route : $\frac{1}{3}\int 3 \cdot (3x+4)^5 \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}(3x+4)^6 + c$

$$= \frac{1}{18}(3x+4)^6 + c$$