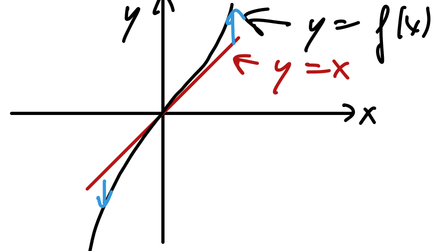
Exemples :



① $f(x) = x + x^3$ en $x = 0$

$f'(x) = 1 + 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

En 0, on a :

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$

Le cas (ii) du Thm s'applique, et donc 0 est un point d'inflexion de f.

On peut le vérifier directement :

$$f(x) = \underbrace{x}_{\text{l'équation de la tangente en 0}} + \underbrace{x^3}_{\to\, r(x)} \; ; \quad \text{et on a } r(x)\cdot x = x^4 > 0, \ \forall x \neq 0.$$

Exemple où le Thm. ne s'applique pas :

② $f(x) = x^4$

On a $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ (et $f^{(4)}(0) = 4! = 24$)

Donc le Thm ne s'applique pas en 0.

Ici 0 n'est pas un point d'inflexion car $f(x) = \underbrace{0}_{\text{tangente en 0}} + \underbrace{x^4}_{r(x) \geq 0}$.

fin 21/11

6.10.3 Exemple d'étude de fonction

On veut étudier et tracer le graphe de la fonction suivante :

$$f(x) = |2x - 1| - x^2 + 1 \quad , \quad D(f) = [-3, 3]$$

Pour $x \geq \frac{1}{2}$, $2x - 1 \geq 0$ et pour $x < \frac{1}{2}$, $2x - 1 < 0$ donc :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x - x^2 & \text{si } x \in [-3, \tfrac{1}{2}] =: I_1 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [\tfrac{1}{2}, 3] =: I_2 \end{cases}$$

1/ Domaine : $D(f) = [-3, 3]$

2/ Symétries : (paire ? impaire ? périodique ?) : aucune symétrie évidente

3/ Zéros de f (points où $f(x) = 0$) :

- Sur I_1 : $x^2 + 2x - 2 = 0$. Le discriminant est : $2^2 - 4(-2)\cdot 1 = 12$

  On a donc 2 racines : $\begin{cases} \dfrac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1+\sqrt{3} \simeq 0{,}7 \notin I_1 \\ \dfrac{-2-\sqrt{12}}{2} = -1-\sqrt{3} \simeq -2{,}7 \in I_1 \end{cases}$

  $\to$ la seule solution dans I_1 est $x_1 = -1-\sqrt{3}$.

- Sur I_2 : $x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \notin I_2 \\ \text{ou} \\ x = 2 \in I_2 \end{cases}$

  $\to$ la seule solution dans I_2 est $x_2 = 2$.

4/ Continuité de f : f est continue (somme et composition de fonctions continues).

5/ Dérivabilité de f : (calcul de f' et f'' et de leur domaine).

f est dérivable deux fois sur l'intérieur de I_1 et de I_2 (mais pas sur $I_1 \cup I_2$).

- Sur I_1 : $f'(x) = -2-2x$, $f''(x) = -2$
- Sur I_2 : $f'(x) = 2-2x$, $f''(x) = -2$

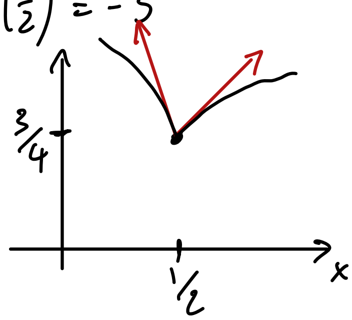
6/ Points particuliers :

(i) f est-elle dérivable en $\frac{1}{2}$?

On a $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = -2-2\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

Comme $-3 \neq 1$, f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

D'après les signes de $f'_+\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'_-\left(\frac{1}{2}\right)$, f admet un minimum local en $\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$



(ii) Points critiques (où $f' = 0$)

- Sur I_1, $f'(x) = -2-2x = 0 \iff x = -1 \in I_1$ et $f(-1) = 3$ et $f''(-1) = -2$

  $\Rightarrow$ f atteint un maximum local en -1.

- Sur I_2, $f'(x) = 2-2x = 0 \iff x = 1 \in I_2$ et $f(1) = 1$ et $f''(1) = -2$

  $\Rightarrow$ f atteint un maximum local en 1.

(iii) Valeurs aux bords : • $f(-3) = -1$ et $f'_+(-3) = 4$: minimum local en -3

• $f(3) = -3$ et $f'_-(3) = -4$: minimum local en 3

→ l'ensemble image est $[\min(f), \max(f)]$ avec $\begin{cases} \min(f) = \min\{\frac{3}{4}, -1, -3\} = -3 \\ \max(f) = \max\{3, 1\} = 3 \end{cases}$

7. Monotonie, convexité, concavité

f' n'est pas définie en $\frac{1}{2}$.

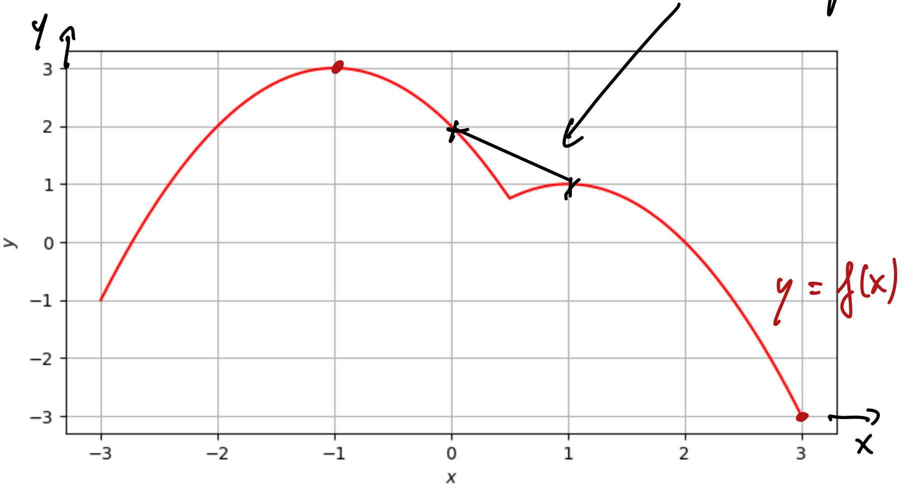
x	-3		-1		$\frac{1}{2}$		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	$\Vert$	↗		↘	

$\underbrace{\quad}_{}$ f croissante sur $[-3,-1]$

x	-3		$\frac{1}{2}$		3
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		concave		concave	

f est concave sur I_1 et sur I_2 mais a priori pas concave sur $I_1 \cup I_2$.

montre que f n'est pas concave sur $[-3,3]$.



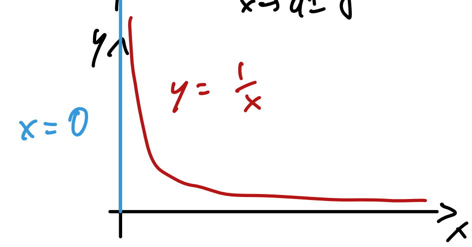
$f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) = \frac{3}{2}$

6.10.5 Asymptotes

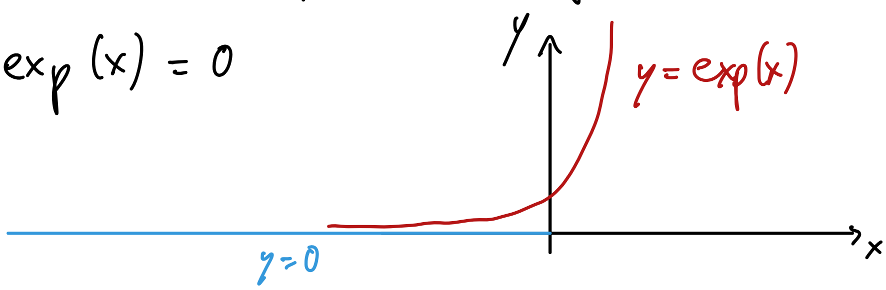
1) Asymptote verticale en $a \in \mathbb{R}$ quand $\lim_{x \to a\pm} f(x) = \pm\infty$

Ex : $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$



2/ Asymptote horizontale : quand $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Ex : $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$



3/ Asymptote oblique : quand $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (ax+b) \big) = 0$

Méthode : ① d'abord calculer $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{?}{=} a$

② ensuite (si la 1ère limite existe) calculer $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax \overset{?}{=} b$

Exemple : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 1}$ en $+\infty$?

① $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x^2 + x} = 2 \ (= a)$

② $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x \big) = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 1} + \dfrac{-2x^2 - 2x}{x + 1} \right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{x + 1} = 3 \ (= b)$$

Donc le graphe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = 2x + 3$.

Chapitre 7 : Développements limités et Séries de Taylor

7.1 Développements limités (DL)

Def : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 ($DL_n(x_0)$) ssi il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n}_{\substack{\text{Partie régulière / principale du DL} \\ P_n(x)}} + \underbrace{(x-x_0)^n \varepsilon(x)}_{\text{reste / erreur}}$$

et $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Prop : Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors P_n est déterminé de manière unique.

Thm (Formule de Taylor). Soit I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Si $f \in C^n(I)$ (Rappel: $C^n(I)$ = ensemble des fonctions n fois continument dérivables sur I) alors f admet un $DL_n(x_0)$, donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\substack{\text{Polynôme de Taylor} \\ P_n(x)}} + \underbrace{(x-x_0)^n \varepsilon(x)}_{\text{reste } r_n(x)}$$

où $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Si de plus $f^{(n)}$ est dérivable alors $\exists\, u \in]x_0, x[$ tel que $\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)$

c'est-à-dire $\quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

<u>Exemple</u> : Prenons $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$.

- $a_0 = \frac{1}{0!} f^{(0)}(0) = 0$ et $P_0(x) = 0$
- $a_1 = \frac{1}{1!} f^{(1)}(0) = 1$ et $P_1(x) = 0 + 1 \cdot x = x$
- $a_2 = \frac{1}{2!} f^{(2)}(0) = \frac{1}{2}(-\sin(0)) = 0$ et $P_2(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = x$
- $a_3 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{1}{6}(-\cos(0)) = \frac{-1}{6}$ et $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$