

Exercice 1. Puisqu'il s'agit d'un système *paramétrique* de 2 équations à 2 inconnues, utilisons la méthode de Cramer.

$$D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a+c & a-c \end{vmatrix} = (a+b)(a-c) - (a-b)(a+c) = a^2 - ac + ab - bc - a^2 - ac + ab + bc = 2ab - 2ac = 2a(b-c),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2ab & a-b \\ 2ac & a-c \end{vmatrix} = 2ab(a-c) - 2ac(a-b) = 2a^2b - 2abc - 2a^2c + 2abc = 2a^2(b-c),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a+b & 2ab \\ a+c & 2ac \end{vmatrix} = (a+b)2ac - (a+c)(2ab) = 2a^2c + 2abc - 2a^2b - 2abc = 2a^2(c-b) = -2a^2(b-c).$$

- Pour $a \neq 0$ et $b \neq c$ on a $D \neq 0$ et les formules de Cramer s'appliquent :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2a^2(b-c)}{2a(b-c)} = a,$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2a^2(b-c)}{2a(b-c)} = -a \quad \text{d'où } S = \{(a; -a)\}.$$

- Si $a = 0$ ou $b = c$, alors $D = D_x = D_y = 0$ et le système est indéterminé; même si dans ce cas une des équations est nécessairement superflue, analysons les différentes formes possibles de l'ensemble des solutions :
 - Si $a \neq 0$ et $b = c$, alors $S = \{(x; y) \mid (a+b)x + (a-b)y = 2ab\}$.
En particulier, si $a \neq 0$ et $b = c = 0$, alors $S = \{(x; -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une droite de pente -1 ; si $a \neq 0$ et $a = b = c$, alors $S = \{(a; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est une droite verticale; si $a \neq 0$ et $-a = b = c$, alors $S = \{(x; -a) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une droite horizontale.
 - Si $a = 0$ et b et c sont non tous les deux nuls, alors $S = \{(x; x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une droite de pente 1.
 - Si $a = b = c = 0$, le système est nul et donc $S = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 585 \\ x - 8y = 0 \end{cases}$ De cette équation on a $x = 8y$ que l'on substitue dans la première.

$$\begin{cases} 64y^2 + y^2 = 585 \\ x = 8y \end{cases}$$

La première équation donne $65y^2 = 585$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3,$$

et donc $x = 8 \cdot \pm 3 = \pm 24$. Ainsi $S = \{(24; 3), (-24; -3)\}$.

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x + y = 16 \end{cases}$ De cette équation on a $x = 16 - y$ que l'on substitue dans la première.

$$\begin{cases} (16 - y)^2 - y^2 = 96 \\ x = 16 - y \end{cases}$$

La première équation nous donne $256 - 32y + y^2 - y^2 = 96$ et donc $y = 5$, ainsi $x = 11$. La solution du système est donc $S = \{(11; 5)\}$.

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy + 10 = 0 \end{cases}$ De cette équation on a $x = \frac{-10}{y}$ que l'on substitue dans la première.

La première équation nous donne alors une équation en y du quatrième degré dont voici la résolution

$$\frac{100}{y^2} + y^2 = 29 \mid \cdot y^2$$

$$y^4 - 29y^2 + 100 = 0$$

$$(y^2 - 4)(y^2 - 25) = 0$$

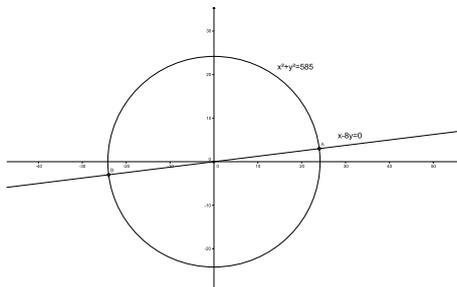
$$(y - 2)(y + 2)(y - 5)(y + 5) = 0.$$

Il y a donc quatre possibilité pour y . Si $y = 2$ alors $x = \frac{-10}{2} = -5$, si $y = -2$ alors $x = \frac{-10}{-2} = 5$, si $y = 5$ alors $x = \frac{-10}{5} = -2$ et si $y = -5$ alors $x = \frac{-10}{-5} = 2$. Ainsi la solution du système est

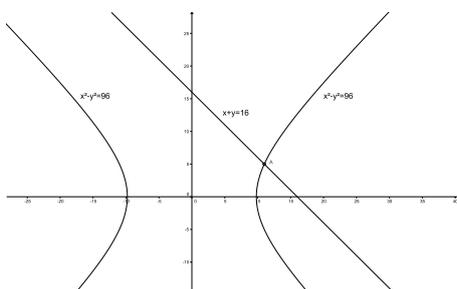
$$S = \{(-2; 5); (-5; 2); (5; -2); (2; -5)\}$$

Remarque avancée : Il est intéressant de voir ce que représentent géométriquement ces systèmes d'équations.

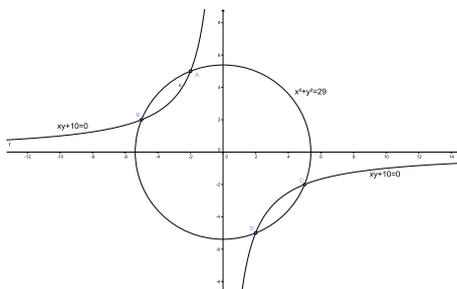
- **Système a).** L'équation $x^2 + y^2 = 585$ représente un cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{585}$ et les solutions du système représentent donc les points d'intersection entre ce cercle et la droite $x - 8y = 0$. La figure suivante représente ces solutions :



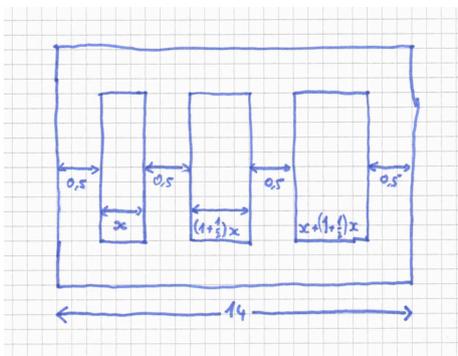
- **Système b).** Cette fois-ci, l'équation $x^2 - y^2 = 96$ représente ce que l'on appelle une hyperbole. La figure suivante représente ces solutions :



- **Système c).** Dans ce cas on complique encore un peu la situation. $x^2 + y^2 = 29$ représente un cercle et $xy - 10 = 0$ une hyperbole, comme on peut le voir dans la figure suivante il y a bien quatre points d'intersection :



Exercice 3. Dans ce genre de problème, il est conseillé de commencer par faire un croquis de la situation.



Posons x comme étant la largeur de la première fenêtre, la deuxième a une largeur égale à une fois et demie la première, c'est-à-dire $(1 + \frac{1}{2})x = \frac{3}{2}x$. La troisième fenêtre a une largeur égale à la somme des largeurs des deux premières : $x + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}x$. Si on additionne les longueurs des trois fenêtres et l'écart entre chacune d'entre-elles et le mur, l'énoncé nous dit que l'on arrive à 14 mètres. Écrivons cela en équation et résolvons-la.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} &= 14 \\ \frac{10}{2}x + 4 \cdot \frac{1}{2} &= 14 \\ 5x &= 14 - 2 \\ x &= \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi $x = \frac{12}{5} = 2.4$ mètres, c'est la largeur de la première fenêtre. La deuxième a une largeur égale à $\frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$ mètres, la troisième a une largeur de $\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{5} = 6$ mètres.

Exercice 4.

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 9 & | \cdot 1 \\ x + 2y + 3z = 14 & | \cdot (-1) \\ 3x + 2y + z = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 9 & \text{On additionne les deux premières lignes et on garde la première.} \\ -x - 2y - 3z = -14 \\ 3x + 2y + z = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 9 & | \cdot (-3) \\ -y - 2z = -5 \\ 3x + 2y + z = 22 & | \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 3y - 3z = -27 \\ -y - 2z = -5 \\ 3x + 2y + z = 22 & \text{On additionne la première et la troisième équation et on garde la première.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ -y - 2z = -5 \\ -y - 2z = -5 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont les mêmes, on peut donc en enlever une et le système devient indéterminé ou impossible, exprimons x et y en fonction de z .

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ -y - 2z = -5 & \text{On additionne les deux équations et on garde la deuxième.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 4 \\ -y - 2z = -5 \end{cases}$$

De la première équation on a $x = z + 4$ et de la deuxième $y = -2z + 5$, ainsi $S = \{(z + 4; -2z + 5; z) | z \in \mathbb{R}\}$ (c'est l'équation de la droite d'intersection des plans $x + y + z = 9$ et $-y - 2z = -5$).

b)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 16 & | \cdot 1, \text{ on additionne les deux premières et on garde cette équation} \\ 3x + 2y - z = 5 & | \cdot 1 \\ 9x - y + 2z = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 16 & | \cdot (-2), \text{ on additionne la première et la troisième et on garde cette équation} \\ 5x + y = 5 \\ 9x - y + 2z = 40 & | \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 16 \\ 5x + y = 5 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$$

En soustrayant la troisième équation de la deuxième, on obtient $0 = -3$ et donc le système est impossible et $S = \emptyset$.

c)
$$\begin{cases} x + y = 16 \\ y + z = 7 & \text{De cette équation on obtient } y = 7 - z \\ z + x = 5 & \text{De cette équation on obtient } x = 5 - z \end{cases}$$

On substitue $y = 7 - z$ et $x = 5 - z$ dans la première équation pour obtenir $5 - z + 7 - z = 16$ et donc $z = -2$, de là $y = 7 - (-2) = 9$ et $x = 5 - (-2) = 7$. Ainsi $S = \{(7; 9; -2)\}$.

d)
$$\begin{cases} x + y + 2z = 14 & | \cdot 1, \text{ on additionne la 1re et la 2e et on garde la 1re} \\ x + 2y + z = 7 & | \cdot (-1) \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 14 & | \cdot (-2), \text{ on additionne la 1re et la 3e et on garde la 1re} \\ -y + z = 7 \\ 2x + y + z = 3 & | \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 14 \\ -y + z = 7 \\ -y - 3z = -25 & \text{On soustrait la 3e de la 2e les deux dernières et on garde la 2e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 14 \\ -y + z = 7 \\ 4z = 32 \end{cases}$$

Alors $z = 8$, de la deuxième équation $y = z - 7 = 8 - 7 = 1$ et de la première $x = 14 - y - 2z = 14 - 2 - 2 \cdot 8 = -3$, ainsi $S = \{(-3; 1; 8)\}$.

Exercice 5. Posons x comme étant le nombre de cartons jaunes reçus par les espagnols, y le nombre de buts marqués par les Espagnols et z le nombre de buts marqués par les Suisses. Les Espagnols ont reçus un carton jaune de plus que le nombre de buts qu'ils ont marqués, donc $x = y + 1$. Le nombre de buts suisses égale un tiers du nombre de buts espagnols donc $z = \frac{1}{3}x$. Le nombre de but marqués pendant la rencontre moins le penalty est égal au nombre de cartons jaunes pour Madrid, ainsi $y + z - 1 = x$. En mettant ensemble ces trois équations, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ x - y = 1 \\ \frac{1}{3}x - z = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on a $z = 2$. en substituant $z = 2$ dans la troisième équation, on a $\frac{1}{3}x - 2 = 0$ et donc $x = 6$. Enfin, en substituant $x = 6$ et $z = 2$ dans la première équation, on obtient $6 - y - 2 = -1$ et donc $y = 5$, ainsi le score final était de 5 à 2 en faveur du Real Madrid.

Exercice 6. Cette affirmation est fausse. En effet, considérons le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, en soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient $0 = 1$ et donc le système est impossible ce qui signifie qu'il n'admet aucune solution. (Les plans représentés par ces équations sont parallèles et ne s'intersectent donc pas.)

Exercice 7.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -59.$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + (-5) \cdot (-2) \cdot 1 - (-5) \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 2 = 14.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 12 + 5 \cdot 16 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 16 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 12 = 0.$

d) $\begin{vmatrix} a & a & b+c \\ a+c & b & b \\ c & a+b & c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c + (b+c) \cdot (a+c) \cdot (a+b) - (b+c) \cdot b \cdot c - a \cdot b \cdot (a+b) - a \cdot (a+c) \cdot c =$
 $2(a \cdot b \cdot c) + (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c + c^2)(a+b) - b^2 \cdot c - b \cdot c^2 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 - a^2 \cdot c - a \cdot c^2 = 2(a \cdot b \cdot c) + a^2 \cdot b +$
 $a \cdot b^2 + a \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c + c \cdot a^2 + a \cdot b \cdot c + c^2 \cdot a + c^2 \cdot b - b^2 \cdot c - b \cdot c^2 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 - a^2 \cdot c - a \cdot c^2 = 4 \cdot a \cdot b \cdot c.$

Exercice 8.

a) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 9$, comme D est non-nul, le système admet une unique solution.

$$D_x = \begin{vmatrix} 23 & 2 & 1 \\ 46 & 2 & 4 \\ 75 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 36, D_y = \begin{vmatrix} 3 & 23 & 1 \\ 5 & 46 & 4 \\ 10 & 75 & 4 \end{vmatrix} = 27, D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 23 \\ 5 & 2 & 46 \\ 10 & 5 & 75 \end{vmatrix} = 45.$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{36}{9} = 4, y = \frac{D_y}{D} = \frac{27}{9} = 3, z = \frac{D_z}{D} = \frac{45}{9} = 5 \text{ et donc } S = \{(4; 3; 5)\}.$$

b) $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$, comme D est non-nul, le système admet une unique solution.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15, D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{12} = 1, z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ et donc } S = \left\{ \left(\frac{5}{4}; 1; \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

Exercice 9.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \rightsquigarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_2 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right)$

Ainsi la solution du système est $S = \{(7; 8; -9)\}$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$

La dernière ligne signifie « $0 = 5$ » et donc le système est impossible, $S = \emptyset$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow -L_2 + 2L_1 \\ L_3 \rightsquigarrow -L_3 + 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \rightsquigarrow L_3 - 5L_2 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \rightsquigarrow -\frac{1}{18}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow L_2 - 5L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 - 2L_2 - 3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi la solution du système est $S = \{(1; 2; 0)\}$.

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 10 & 14 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & 10 & 14 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{(entorse à Gauss)} \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & -59 \end{array} \right)$

La dernière ligne signifie « $0 = -59$ » et donc le système est impossible, $S = \emptyset$.

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 13 & 5 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - 13L_2 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 57 & -61 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \rightsquigarrow \frac{1}{57}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{61}{57} \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 + 7L_3 \\ L_2 \rightsquigarrow L_2 + 4L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{29}{57} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{37}{57} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{61}{57} \end{array} \right)$$

Ainsi la solution du système est $\left\{ \left(\frac{29}{57}; -\frac{16}{57}; -\frac{61}{57} \right) \right\}$.

Exercice 10. Non, car en substituant $(3; 4; -2)$ dans la troisième équation on obtient $-21 + 20 + 6 = 5 \neq 7$

Exercice 11.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & m \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 7 & 7 & m \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \rightsquigarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -8 & m+6 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \rightsquigarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-4 \end{array} \right)$$

Si $m = 4$ le système est indéterminé et admet donc une infinité de solutions, si $m \neq 4$ le système est impossible et n'admet donc aucune solution.

$$\text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -m \\ 2 & 3 & 5 & 0 & m \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightsquigarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -m \\ 0 & 1 & 3 & -2 & m \end{array} \right) \begin{array}{l} L_4 \rightsquigarrow L_3 - L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -m \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -m \end{array} \right)$$

Les deux dernières équations sont les mêmes quelque soit $m \in \mathbb{R}$ et donc le système est indéterminé, il admet ainsi une infinité de solutions quelle que soit la valeur de m .

Exercice 12. Suivons la méthode de Gauss dans les deux cas.

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_4 \rightsquigarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & -11 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \rightsquigarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & -11 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_4 \rightsquigarrow L_4 + 3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{array} \right)$$

On peut s'arrêter à ce stade en constatant qu'il sera possible de substituer la valeur de u donnée par la quatrième équation dans la troisième pour trouver z et ainsi de suite. Le système est donc déterminé.

$$\text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_4 \rightsquigarrow L_4 + 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_4 \rightsquigarrow 2L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_4 \rightsquigarrow L_4 + 2L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Comme la dernière ligne de la matrice ne contient que des zéros, le système est indéterminé.