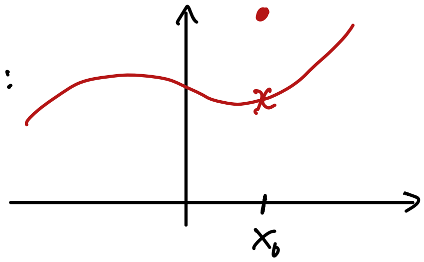
Thm (continuité de la dérivée). Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[\subset D$ continue sur $]a,b[$ et dérivable sur $]a,b[\setminus \{x_0\}$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell$ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Le comportement suivant est exclu pour une fonction dérivée :



Preuve :

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)BH}{=} \lim_{h \to 0+} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \ell$$

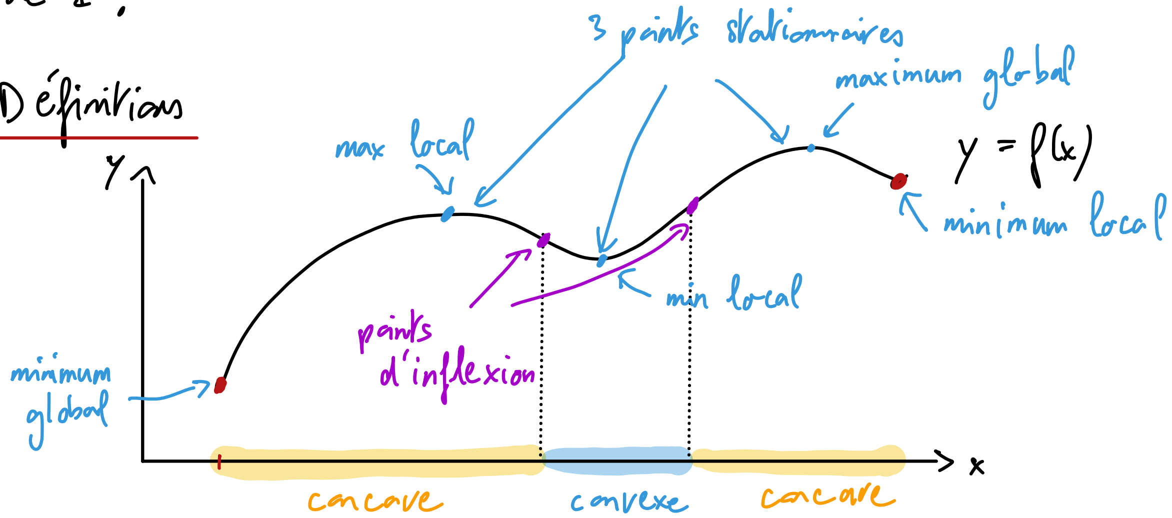
$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)BH}{=} \lim_{h \to 0-} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \ell$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$ ∎

6.10 Etude de fonctions

Dans cette section $f : D \to \mathbb{R}$, $I \subset D$ et $I_0 \subset I$ un sous-intervalle fermé de I.

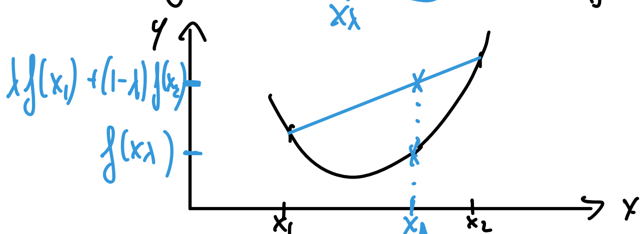
6.10.1 Définitions



- <u>Convexité</u> : f est convexe sur I_0 ssi $\forall x_1, x_2 \in I_0$, $x_1 < x_2$,

$$\forall \lambda \in [0,1] : \quad f(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}_{x_\lambda}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

<u>Illustration</u> :



"Le graphe de f est toujours en-dessous de ses cordes"

- **Concavité** : f est concave sur I_0 ssi $-f$ est convexe sur I_0

  Autrement dit $\forall x_1, x_2 \in I_0$, $x_1 < x_2$, $\forall \lambda \in [0,1]$ on a :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

"Le graphe de f est toujours au-dessus de ses cordes"

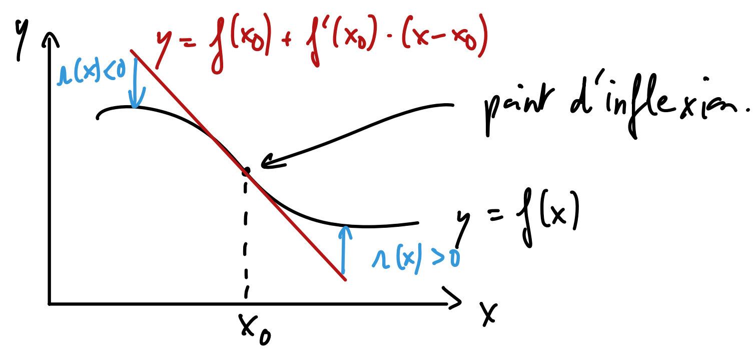
- Un point $x_0 \in I$ est un :
  - point stationnaire (ou point critique) : ssi $f'(x_0) \overset{\text{existe}}{=} 0$.
  - maximum local : "si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in I$ suffisamment proche de x_0"

    $\exists \delta > 0$, $\forall x \in I$ tel que $|x_0 - x| \leq \delta$, on a $f(x_0) \geq f(x)$.
  - minimum local : $\exists \delta > 0$, $\forall x \in I$, $(|x_0 - x| \leq \delta \Rightarrow f(x_0) \leq f(x))$.
  - maximum global : si $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in D$
  - minimum global : si $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in D$
  - extremum (local ou global) : si x_0 est un maximum (global ou local) ou si x_0 est un minimum (global ou local)

- **Point d'inflexion** : si f est différentiable en x_0 et s'il existe $\delta > 0$ et $\alpha \in \{-1, +1\}$ tels que :

$$r(x) = f(x) - \Big(\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}_{\text{"tangente en } x_0\text{"}}\Big)$$

satisfait $\forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \setminus \{x_0\}$ on a $\alpha \cdot r(x) \cdot (x - x_0) > 0$.



6.10.2 Critères

Thm. (critère de $\overset{\text{concavité}}{\text{convexité}}$). Soit I intervalle ouvert et $\overset{\text{intervalle}}{I_0} \subset I$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

f est $\overset{\text{concave}}{\text{convexe}}$ sur I_0 $\iff$ f' $\overset{\text{décroissante}}{\text{croissante}}$ sur I_0

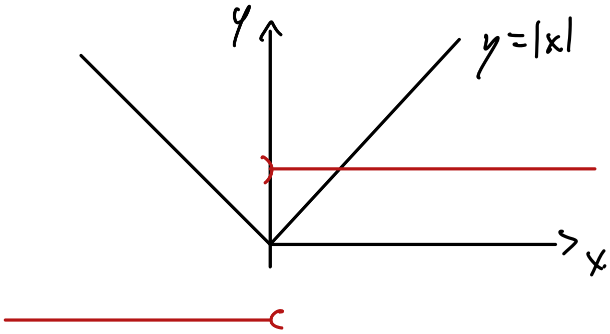
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

f est $\overset{\text{concave}}{\text{convexe}}$ sur I_0 $\iff$ $f'' \overset{\leq}{\geq} 0$ sur I_0

Exemple :

- $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = -\exp(x)$ est concave sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = f''(x) = -\exp(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

⚠ La fonction valeur absolue est convexe mais pas dérivable en 0.



Justification de la convexité : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) = |\lambda x + (1-\lambda) y| \leq \lambda \cdot |x| + (1-\lambda) \cdot |y| = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

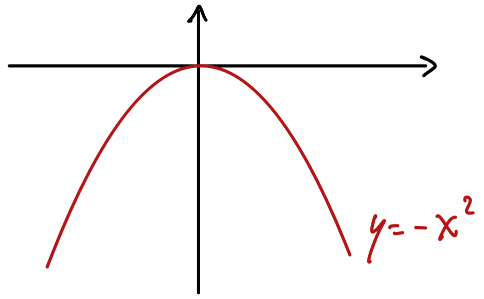
Thm (extremum local). $\underbrace{\text{ici }]a,b[}\subset D(f)$.

(i) Si f admet un extremum local en $x_0 \in]a,b[$ et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

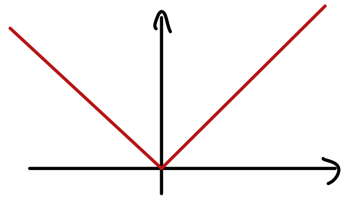
(ii) Si $f'(x_0) = 0$ en $x_0 \in [a,b]$ et si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0.

(iii) Si $f'(x_0) = 0$ en $x_0 \in [a,b]$ et si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local en x_0

(1)



(2)



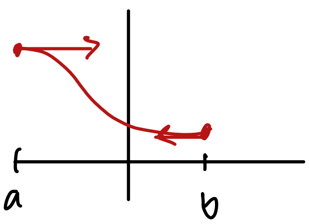
(3)

(1) cas (ii) du Thm. s'applique : 0 est un maximum local (en fait global).

(2) minimum en 0 mais les critères ne s'appliquent pas.

(3) Le thm. ne s'applique pas, mais on a des extrema locaux (en 0) ou globaux. (en a et b)

(4)



ici { le cas (ii) du thm. s'applique en a (maximum local)
{ le cas (iii) du Thm. s'applique en b (minimum local).

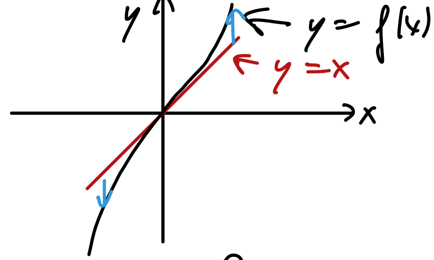
Remarque importante : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, les extrema sont à chercher parmi les points suivants :

- les points stationnaires (ou critiques) $f'(x_0) = 0$.
- les bords de l'intervalle (a et b)
- les points où f n'est pas dérivable.

Thm (points d'inflexion). Soit f une fonction 3 fois dérivable sur $]a,b[$.

(i) Si f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a,b[$ alors $f''(x_0) = 0$

(ii) Si $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$ en $x_0 \in]a,b[$ alors f admet un point d'inflexion en x_0.



Exemples :

① $f(x) = x + x^3$ en $x = 0$

$f'(x) = 1 + 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

En 0, on a :

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$

Le cas (ii) du Thm s'applique, et donc 0 est un point d'inflexion de f.

On peut le vérifier directement :

$$f(x) = \underbrace{x}_{\text{l'équation de la tangente en } 0} + \underbrace{x^3}_{} \longrightarrow r(x) \; ; \; \text{et on a } r(x) \cdot x = x^4 > 0, \; \forall x \neq 0.$$

Exemple où le Thm. ne s'applique pas:

② $f(x) = x^4$

On a $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ (et $f^{(4)}(0) = 4! = 24$)

Donc le Thm ne s'applique pas en 0.

Ici 0 n'est pas un point d'inflexion car $f(x) = \underbrace{0}_{\text{tangente en } 0} + \underbrace{x^4}_{r(x) \geq 0}$.

fin 21/11