Partie I : La dérivée

Exercice 1.
Avec la définition de la dérivée, calculer la dérivée des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
Indication : Utiliser

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Solution.

D'une part,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} + \cos(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{=1} = \cos(x). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} - \sin(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{=1} = -\sin(x). \end{aligned}$$

Exercice 2.
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Déterminer les valeurs de x sur lesquelles la fonction est dérivable et calculer $f'(x)$.

Solution.

On a vu au cours que la dérivée de la valeur absolue $g(x) = |x|$ n'est par dérivable en $x = 0$. Ailleurs, elle vaut

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Ainsi $f'(0)$ n'existe pas non plus et

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + e^x, & x > 0 \\ -1 + e^x, & x < 0. \end{cases}$$

Exercice 3.
Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable partout.

Solution.

En tant que fonction polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il suffit donc d'étudier la dérivabilité de f en $x = 1$.
Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 1$ est la continuité en ce point (si f n'est pas continue en x, alors f ne peut pas être dérivable en x), c'est-à-dire,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 3. \tag{1}$$

Pour montrer que f est dérivable en $x = 1$, nous proposons deux méthodes.
Methode 1. *Il faut vérifier que les dérivées à gauche et à droite en ce point sont égales.*

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x + 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x + \overbrace{\beta - 3}^{=-\alpha \ par\ (1)}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x - \alpha}{x - 1} = \alpha.$$

Donc $f'_-(1) = f'_+(1) \;\Leftrightarrow\; \alpha = 1$. Il suit alors de (1) que $\beta = 3 - \alpha = 2$.

Methode 2. *Nous pouvons utiliser le théorème de la continuité de la dérivée : si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ satisfait*

(1) f continue sur $]a, b[$,
(2) f dérivable sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$,
(3) $\lim_{x\to x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$,

alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = L$.
La dérive de f en $x \neq 1$ est

$$\begin{cases} 2x - 1 & si\ x < 1 \\ \alpha & si\ x > 1 \end{cases}.$$

La limite en 1 existe si et seulement si la limite à gauche de 1 et la limite à droite de 1 existent et sont égales :

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \alpha \\ \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1.$$

Il suit alors de (1) que $\beta = 3 - \alpha = 2$.

Ainsi, la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ x + 2\,, & x > 1 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est aussi de classe C^1)

Partie II : Règles de calcul

Exercice 4.
Calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $f(x) = \sin(x)^2 \cos(x^2)$

d) $f(x) = x^x := e^{x\ln(x)}$

e) $f(x) = \sinh(x)$

f) $f(x) = \cosh(x)$

g) $f(x) = \tanh(x)$

Solution.

a) $f'(x) = \dfrac{5(3x^2-1) - 6x(5x+2)}{(3x^2-1)^2} = -\dfrac{15x^2+12x+5}{(3x^2-1)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \dfrac{2x(1-x^2)+x^3}{(1-x^2)^{3/2}} = \dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$

c) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)\cos(x^2) + \sin(x)^2\big(-\sin(x^2)\big)(2x)$
$= 2\sin(x)\big(\cos(x)\cos(x^2) - x\sin(x)\sin(x^2)\big)$

d) $f'(x) = e^{x\ln(x)} \cdot (x\ln(x))' = x^x(\ln(x)+1)$.

e) $f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.

f) $f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$.

g) $f'(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$.

Exercice 5.
Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions f et g suivantes.

a) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7\cos(x)^4$ et $g(x) = \ln(x)^3$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = (x-1)^4$.

Solution.

Comme on a $(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$, il faut calculer les dérivées de f et g dans les points concernés.

a) Pour calculer $f'(x)$, écrivons $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\,u(x)$ où $u(x) = \sin(x)^7\cos(x)^4$. Alors

$$f'(x) = 2 + e^x\,u(x) + (e^x - 1)\,u'(x) \qquad \textit{et} \qquad u'(x) = 7\sin(x)^6\cos(x)^5 - 4\sin(x)^8\cos(x)^3.$$

Ainsi $u(0) = u'(0) = 0$ et donc $f'(0) = 2$.

Ensuite on a $g'(x) = \dfrac{3\ln(x)^2}{x}$. Puisque $f(0) = 3$ on trouve finalement

$$(g \circ f)'(0) = g'(3)f'(0) = \frac{3\ln(3)^2}{3}2 = 2\ln(3)^2.$$

b) Pour calculer $f'(0)$, il faut utiliser la définition de la dérivée :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + 2\right) = 2,$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ comme on a montré à l'Ex. 4 iv) de la Série 9.
Comme $g'(x) = 4(x-1)^3$ et $f(0) = 0$, on obtient

$$(g \circ f)'(0) = g'(0)f'(0) = (-4)(2) = -8.$$

Exercice 6.
Calculer la dérivée de la réciproque f^{-1} des fonctions $f : I \to f(I)$ suivantes, et donner le domaine de définition de $(f^{-1})'$

(i) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
(ii) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$
(iii) $f(x) = \sinh(x)$ sur $\mathbb{R}$
(iv) $f(x) = \cosh(x)$ sur $I = [0, \infty[$
(v) $f(x) = \tanh(x)$ sur $\mathbb{R}$

Rappel : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \qquad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Solution.

(i) $f^{-1}(x) = \arcsin(x)\,, \quad D(f^{-1}) = [-1, 1].$
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \quad D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \left]-1, 1\right[\,.$$

(ii) $f^{-1}(x) = \arccos(x)\,, \quad D(f^{-1}) = [-1, 1].$
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\arccos(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \left]-1, 1\right[\,.$$

(iii) $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}\,.$
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh(\operatorname{arcsinh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,, \qquad D((f^{-1})') = \mathbb{R}.$$

(iv) $f^{-1}(x) = \operatorname{arccosh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \ [1, \infty[\,.$
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arccosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{arccosh}(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad D((f^{-1})') =]1, \infty[\,.$$

(v) $f^{-1}(x) = \operatorname{arctanh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) =]-1, 1[\,.$
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1 - \tanh(\operatorname{arctanh}(x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}\,, \qquad D(\,(f^{-1})'\,) =]-1, 1[\,.$$

Partie III : Applications de la dérivée

Exercice 7.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Démontrer que
$$f \text{ décroissante sur } [a, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \leq 0 \text{ sur }]a, b[.$$

Solution.

($\Longrightarrow$) Supponsons que f est décroissante et montrons que la dérivée est négative. Soit $x_0 \in]a, b[$. Alors par dérivabilité en x_0, nous avons
$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$
car $x - x_0 > 0$ par définition de la dérivée à droite, et $f(x) - f(x_0) \leq 0$ par décroissance.
($\Longleftarrow$) Supposons que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et montrons que f est décroissante. Soient $x, y \in [a, b]$ tels que $x < y$. Puisque f est continue sur $[x, y] \subset [a, b]$ et dérivable sur $]x, y[$, nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c \in]x, y[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$
Par hypothèse, $f'(c) \leq 0$ et $x - y < 0$, ce qui nous force à avoir $f(x) - f(y) \geq 0$, c'est à dire $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, f est bien décroissante.

Exercice 8 (Exponentielle en base a)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = a^x := e^{x\ln(a)}$$

où ln est la fonction logarithme naturel.

a) Calculer $(a^x)'$

b) A l'aide du corollaire du T.A.F, montrer que f est strictement monotone.

c) En déduire l'existence de la réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, que l'on notera $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ (logarithme en base a).

d) Calculer $\log_a'(x)$.

Solution.

a) En utilisant la règle de compositions de fonctions, nous avons immédiatement

$$(a^x)' = e^{x\ln(a)}(x\ln(a))' = a^x \ln(a).$$

En particulier, nous avons $f'(x) = \ln(a)f(x)$.

b) Puisque $a^x > 0$ pour tout x, le signe de f' dépend de celui de $\ln(a)$:

$$\begin{cases} \ln(a) < 0 & \textit{si } 0 < a < 1 \\ \ln(a) > 0 & \textit{si } a > 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f'(x) < 0 & \textit{si } 0 < a < 1 \\ f'(x) > 0 & \textit{si } a > 1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} f \textit{ strict. décroissante} & \textit{si } 0 < a < 1 \\ f \textit{ strict. croissante} & \textit{si } a > 1 \end{cases}.$$

Ainsi f est strictement monotone pour toute base a.

c) Puisque f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est bijective et admet une réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, que l'on notera $f^{-1}(x) = \log_a(x)$.

d) Par la formule de la dérivée d'une réciproque, nous avons par (i)

$$\log_a'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)} = \frac{1}{\ln(a)a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{\ln(a)x}.$$

Exercice 9.
Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\tanh(x) - 1\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1+\sin(x)\right)^{1/x}$

Solution.

a) Posons $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = x-2$. Alors on a $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Les hypothèses de BH sont donc satisfaites et on a

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \overset{BH}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1.$$

b) Ici, on doit utiliser la règle BH plusieurs fois. Nous commençons par transformer le produit en une fraction avec l'astuce de la "division par l'inverse" :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\tanh(x)-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tanh(x)-1}{\frac{1}{x}} \overset{BH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\cosh(x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\cosh(x)^2}$$

$$= -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\cosh(x)}\right)^2 \overset{BH}{=} -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sinh(x)}\right)^2 = 0\,.$$

La première utilisaition de BH est justifiée par une FI de type $\frac{0}{0}$ tandis que la seconde est une FI de type "$\frac{\infty}{\infty}$".

c) On a $(1+\sin(x))^{1/x} = \exp\Big(\frac{1}{x}\ln(1+\sin(x))\Big)$. On va d'abord calculer la limite de l'exposant. Posons $f(x) = \ln(1+\sin(x))$ et $g(x) = x$. Alors $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Ainsi

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{x} \overset{BH}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1} = 1\ .$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to0}(1+\sin(x))^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{x}\right) = e^1 = e\,.$$

Exercices challenges.

Exercice 10.
Démontrer le **théorème des accroissements finis généralisé (T.A.F.G.)** :
soient $f, g\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continues et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Indication : appliquer le théorème de Rolle à une fonction $h(x)$ bien choisie (comme dans la preuve du théorème des accroissements finis).

Solution.
On pose $h(x) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\Big)$. On calcule $h(a) = 0$ et $h(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in\ ]a,b[$ avec $h'(c) = 0$. Or $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(u) = 0$, et on en déduit le TAF généralisé.

Exercice 11.
Déduire du T.A.F.G. la **règle de Bernoulli-L'Hôspital** :
soient $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivables telle que

(I) $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0$

(II) $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$

(III) $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Indications :

- *Commencer par prolonger f et g par continuité sur $[a,b[$;*
- *Considérer une suite $x_n \to a$ et montrer l'existence d'une suite (c_n) telle que*

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

- *Conclure avec la caractérisation des limites par les suites :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L, \ \forall \ \textit{suite } a_n \to x_0.$$

Solution.
Considérons une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset \,]a,b[$ *telle que* $x_n \to a^+$ *et montrons que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L,$$

ce qui concluera la preuve.
Puisque $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0$, *nous pouvons prolonger* f *et* g *par deux nouvelles fonctions continues* $\tilde{f}, \tilde{g} : \ [a,b[\to \mathbb{R}$ *définies par*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in \,]a,b[\\ 0 & \textit{si } x = a, \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \textit{si } x \in \,]a,b[\\ 0 & \textit{si } x = a. \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, *nous avons*

— $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ *sont continues sur* $[a, x_n] \subset \,]a,b[$ *et dérivables sur* $]a, x_n[\,\subset\,]a,b[$,

— $\tilde{g}'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in \,]a, x_n[\,\subset\,]a,b[$,

ce qui nous permet d'appliquer le T.A.F.G : il existe $c_n \in \,]a, x_n[$ *tel que*

$$\frac{\tilde{f}'(c_n)}{\tilde{g}'(c_n)} = \frac{\tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(a)} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \tag{2}$$

Or, puisque

$$a < c_n < \underbrace{x_n}_{\to a}, \ \forall n \geq 1$$

le théorème des deux gendarmes implique que $\lim_{n\to\infty} c_n = a$. *Ainsi, par l'hypothèse (III)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

ce qui nous permet de conclure avec l'égalité (2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L.$$