Analyse I – Série 10

Echauffement. (Dérivée de la valeur absolue)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Donner le domaine de définition et l'expression de f' et tracer les graphes de f et f'.

Exercice 1. (Continuité de la dérivée)

Calculer la dérivée de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$. Est-ce que la fonction f' est continue en $x = 0$?

Exercice 2. (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective sur l'intervalle $I \subset D(f)$. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} et calculer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \sin(x) \quad \text{sur } I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = \cos(x) \quad \text{sur } I = [0, \pi]$

c) $f(x) = \mathrm{tg}(x) \quad \text{sur } I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $f(x) = e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}$

e) $f(x) = e^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$

f) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$

g) $f(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$

h) $f(x) = \mathrm{ch}(x) \quad \text{sur } I = [0, \infty[$

i) $f(x) = \mathrm{th}(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$

j) $f(x) = \coth(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}^*$

Rappel : sh (resp. ch) est une notation pour désigner la fonction sinus (resp. cosinus) hyperbolique. La fonction cotangente hyperbolique coth est définie par $\coth := 1/\mathrm{th} = \mathrm{ch}/\mathrm{sh}$.

Exercice 3. (Théorème des accroissements finis)

Montrer en utilisant les corollaires du théorème des accroissements finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0\,.$$

Exercice 4. (Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{Log}(x-1)}{x-2}$ b) (*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\mathrm{th}(x) - 1\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1 + \sin(x)\right)^{1/x}$

Pour (b) la fonction $\mathrm{th} = \mathrm{sh}\,/\,\mathrm{ch}$ est la fonction tangente hyperbolique. On pourra appliquer BH plusieurs fois jusqu'à ce que la limite ne soit pas indéterminée.

Exercice 5. (Application de la Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Indication : on pourra se ramener à l'étude de fonctions, en utilisant le fait que si $a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$ si cette dernière limite existe.

Exercice 6. (QCM : Révisions)

a) Si $f : X \to Y$ est croissante et bijective, alors $f^{-1} : Y \to X$ est

- ☐ décroissante
- ☐ croissante
- ☐ ni croissante ni décroissante
- ☐ bornée

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire et bijective, alors f^{-1} est

- ☐ impaire
- ☐ paire
- ☐ ni paire ni impaire
- ☐ périodique

c) Soit $f : X \to Y$ une fonction bijective et bornée sur X, alors $f^{-1} : Y \to X$ est

- ☐ bornée sur Y
- ☐ croissante
- ☐ paire
- ☐ aucun des autres choix n'est correct.

Exercice 7. (*) (Règles de dérivation)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. En partant de la définition de la dérivée d'une fonction, montrer les propriétés suivantes :

a) $(f+g)' = f' + g'$
b) $(fg)' = f'g + fg'$ (vu en cours)
c) si de plus $f \neq 0$ sur I, $(1/f)' = -f'/f^2$

Exercice 8. (V/F : Dérivation)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

	V	F
a) Si $f(x) = x + e^x$, alors $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$.	☐	☐
b) Si f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I.	☐	☐

Exercice 9. (V/F : Propriétés de f et f' sur un intervalle)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \subset D(f)$, $a < b$, et dérivable sur $]a,b[$.

	V	F
a) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.	☐	☐

b) Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. ☐ ☐

c) Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. ☐ ☐

d) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$. ☐ ☐

e) Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell$ existe, alors f est dérivable à droite en a et la dérivée à droite est $f'_d(a) = \ell$. ☐ ☐