Corrigé Test 2 - Dérivée 22 novembre 2023

Exercice 1. *(3 + 3 + 3 +3 = 12 points)*

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt[4]{(2-3x^2)^3}$
$f'(x) = \left((2-3x^2)^{3/4}\right)' = \frac{3}{4}(2-3x^2)^{-1/4} \cdot (-6x) = \frac{-18x}{4(2-3x^2)^{1/4}} = \frac{-9x}{2\sqrt[4]{2-3x^2}}$

b) $g(x) = \cos^3(2x+1)$
$g'(x) = 3\cos^2(2x+1) \cdot (-\sin(2x+1)) \cdot 2 = -6\cos^2(2x+1)\sin(2x+1)$

c) $h(x) = \ln(x^3) \cdot \sin(2x)$
$h'(x) = \frac{3x^2}{x^3} \cdot \sin(2x) + 2\ln(x^3) \cdot \cos(2x) = \frac{3\sin(2x)}{x} + 2\ln(x^3)\cos(2x) = \frac{3\sin(2x) + 6x\ln(x)\cos(2x)}{x}$

d) $k(x) = \frac{e^{-5x}}{x}$ $\qquad k'(x) = \frac{-5e^{-5x} \cdot x - e^{-5x} \cdot 1}{x^2} = \frac{-e^{-5x}(5x+1)}{x^2} = -\frac{(5x+1)}{x^2\, e^{5x}}$

Exercice 2. *(5 points)*

Montrer que la fonction $f(x) = -5x + 3$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$ en appliquant la définition formelle de la continuité vue au cours.

f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ici, on veut $|f(x) - f(a)| = |-5x + 3 - (-5a+3)| = 5\,|x-a| < 5\,\delta = \varepsilon$.
Ainsi, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ et la définition de la continuité est vérifiée.

Exercice 3. *(4 points)*

Enoncer le théorème des accroissements finis.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a,b[$. Alors qu'il existe alors un point $a < c < b$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Exercice 4. *(4 points)*

Donner la définition de la fonction e^x et montrer qu'elle est égale à sa dérivée.

Pour tout nombre réel x, le nombre e^x est défini par

$$e^x \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;\overset{x\neq 0}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$$

$$(e^x)' \;=\; \left(1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' \;=\; 0 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cancel{n}\, x^{n-1}}{\cancel{n}(n-1)!} \;\overset{m=n-1}{=}\; 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \;=\; e^x$$

Exercice 5. *(2 + 3 + 4 = 9 points)*

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2} = 0 \cdot 0 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sinh(x)} \overset{"\frac{0}{0}"\to B.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{\cosh(x)} = 3$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x-\cos(x^2)}{4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x-\cos(x^2)}{4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{7x}{4x+3} - \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x^2)}{4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{4+\frac{3}{x}} + 0 = \frac{7}{4}$$

car par le théorème des gendarmes, $0 \leq \lim\limits_{x\to\infty} \left|\frac{\cos(x^2)}{4x+3}\right| \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{4x+3} = 0.$

Exercice 6. *(3 + 4 = 7 points)*

a) Donner la définition d'une fonction convexe.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est convexe sur l'intervalle $[a, b]$ si, pour toute paire de points x et y compris entre a et b et tout nombre réel $0 \leq t \leq 1$, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

b) Soit f une fonction réelle dérivable. En utilisant la définition de la dérivée, démontrer que si f est paire, alors la dérivée f' est impaire.

Première variante :

On utilise le changement de variables $y = -x$ et le fait que si $-y \to -a$, alors $y \to a$.

$$f'(-a) \overset{\text{déf. de } f'(-a)}{=} \lim_{x\to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x+a} \overset{x=-y}{=} \lim_{y\to a} \frac{f(-y)-f(-a)}{-y+a}$$

$$\overset{f \text{ paire}}{=} \lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{-(y-a)} \overset{\lim \text{ est linéaire}}{=} -\lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

$$\overset{\text{déf. de } f'(a)}{=} -f'(a).$$

Deuxième variante :

$$f'(-x) \overset{\text{déf. de } f'(-x)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-(x-h))-f(-x)}{h}$$

$$\overset{f \text{ paire}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} \overset{k=-h}{=} \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(-x)}{-k}$$

$$\overset{\lim \text{ est linéaire}}{=} -\lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(-x)}{k} \overset{\text{déf. de } f'(x)}{=} -f'(x).$$

Exercice 7. *(3 + 4 + 4 + 4 + 3 = 18 points)*

On considère la fonction f donnée par $\qquad f(x) = \ln(8 - x^3)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.
$8 - x^3 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 < 8 \;\Leftrightarrow\; x < 2$. Ainsi, $ED(f) =]-\infty, 2[$
zéro de f : $8 - x^3 = 1 \iff x^3 = 7 \iff x = \sqrt[3]{7} \cong 1.9$
Signe :

x	-∞		$\sqrt[3]{7}$		2	+∞
$f(x)$		$+$	0	$-$		

b) Déterminer les éventuelles asymptotes de f.
AV : $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(8 - x^3) = \text{" } \ln(0)\text{"} = -\infty \;\Rightarrow\;$ AV : $x = 2$.
AH : $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(8 - x^3) = \ln(+\infty) = +\infty \;\Rightarrow$ pas d'AH
AO : $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(8 - x^3)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\to B.H.}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^2}{8 - x^3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3}{\frac{8}{x^2} - x} = 0 \Rightarrow$

L'AO serait une AH et il n'y a pas d'AH. Donc pas d'AO non plus.

c) Etudier la croissance de f.

$f'(x) = \dfrac{-3x^2}{8 - x^3}$. $\qquad ED(f') = \mathbb{R} - \{2\} \cap ED(f) = ED(f) =]-\infty, 2[$.

zéro de f' : $x = 0$ mais f' ne change pas de signe et est toujours négative.

r	-∞		0		2	+∞
$f'(x)$		$-$	0	$-$		
$f(x)$	$\searrow$		Palier$(0; \ln 8)$	$\searrow$		

d) Etudier la courbure de f.
$$f''(x) = \frac{-6x\,(8 - x^3) + 3x^2\,(-3x^2)}{(8 - x^3)^2} = \frac{-48x + 6x^4 - 9x^4}{(8 - x^3)^2} = \frac{-48x - 3x^4}{(8 - x^3)^2} = \frac{-3x\,(16 + x^3)}{(8 - x^3)^2}$$
$ED(f'') = ED(f) =]-\infty, 2[$.

zéro de f'' : $x = 0$ et $x = -\sqrt[3]{16} = -2\,\sqrt[3]{2}$

y	-∞		$-2\,\sqrt[3]{2}$		0		2	+∞
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$		$\cap$	I_1	$\cup$	I_2	$\cap$		

f admet les points d'inflexion $I_1(-2\,\sqrt[3]{2}; \ln 24) \simeq (2.5; 3.2)$ et $I_2\,(0; \ln 8) \simeq (0; 2)$.

e) Représenter le graphe de f dans la grille ci-dessous à l'aide de toutes les éléments identifiés précédemment.