<u>Notation :</u> $\bigcap_{k=\ell}^{m} A_k = A_\ell \cap A_{\ell+1} \cap \dots \cap A_m$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $\quad C^\infty(I) \subset C^{k+1}(I) \subset C^k(I) \subset C^0(I)$

Si $f \in C^k(I)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) on dit que f est k fois <u>continûment dérivable</u> sur I.

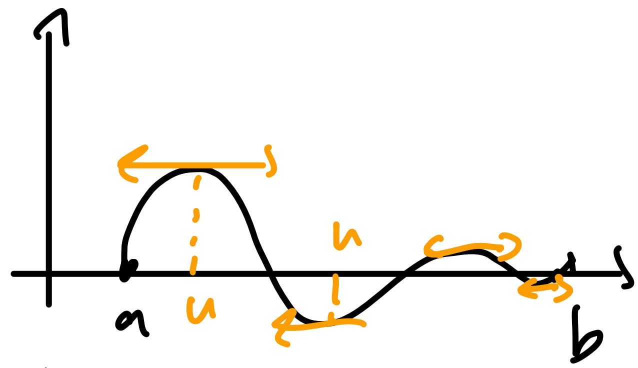
6.8 Application du calcul différentiel.

6.8.1 Théorème de Rolle

<u>Thm</u> : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$). Si :

1) f est continue sur $[a,b]$.
2) f est dérivable sur $]a,b[$
3) $f(a) = f(b)$ $(= 0)$

Alors $\exists\, u \in]a,b[$ t.q $f'(u) = 0$



<u>Exemple</u> : $f : \begin{cases} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ (cf. ci-dessus)

$\leadsto$ f satisfait les hypothèses et $\exists\, u \in]-1,1[$ t.q $f'(u) = 0$ (ici $u=0$).

fin 14/11

<u>Preuve</u> : f est continue sur $[a,b]$ donc elle admet un maximum M et un minimum m.

- Si $M = m = 0$ alors $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$, donc $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$
- Supposons $M > 0$. Alors $\exists\, c \in]a,b[$ t.q $f(c) = M$ et donc $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

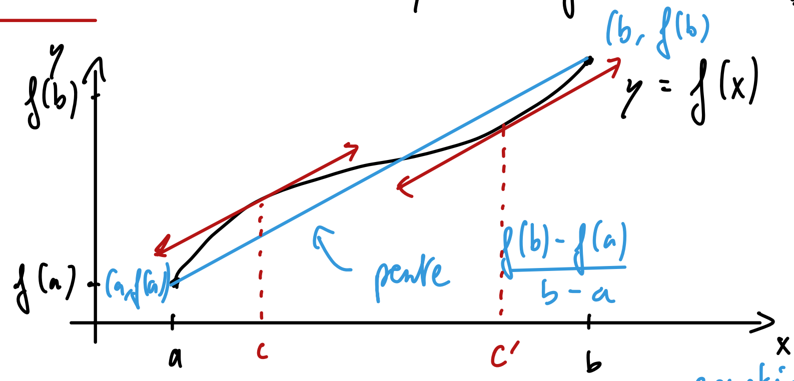
Comme f est dérivable en c (par hypothèse), on a :

$$\left.\begin{aligned} f'(c) &= f'_d(c) = \lim_{x \to c+} \frac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{\geq 0}} \leq 0 \\ f'(c) &= f'_g(c) = \lim_{x \to c-} \frac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{\leq 0}} \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{ donc } f'(c) = 0$$

- Si $M = 0$ et $m < 0$, raisonnement analogue. ■

6.8.2 Thm. des accroissements finis

Thm (T.A.F) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Alors $\exists u \in]a,b[$ t.q $\quad f'(u) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Preuve : Soit $g(x) = f(x) - \overbrace{\left(f(a) + (x-a)\cdot \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)}^{\text{équation de droite bleue}}$

On a : • g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

• $g(a) = g(b) = 0$

Donc par le Thm. de Rolle, $\exists u \in]a,b[$ t.q. $0 = g'(u) = f'(u) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ainsi $f'(u) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Remarque : la conclusion du T.A.F. peut se réécrire : $f(b) - f(a) = f'(u)\cdot(b-a)$.

Corollaire : Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors :

(i) f est constante sur $[a,b]$ $\iff$ $f' = 0$ sur $]a,b[$

(ii) f est croissante sur $[a,b]$ $\iff$ $f' \geq 0$ sur $]a,b[$

(iii) f est décroissante sur $[a,b]$ $\iff$ $f' \leq 0$ sur $]a,b[$

(iv) f est strictement croissante sur $[a,b]$ $\Leftarrow$ $f' > 0$ sur $]a,b[$

(v) f est strictem^t décroissante sur $[a,b]$ $\Leftarrow$ $f' < 0$ sur $]a,b[$

Contre-exemple à $\Rightarrow$ pour (iv) : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$ strictement croissante mais $f'(0) = 0$

Thm (Accroissements Finis généralisé). Soient f et g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} .$$

Rmq : Pour $g(x) = x$, on retrouve le T.A.F.

Preuve : Par la contraposée du Thm. de Rolle, on a $g(b) \neq g(a)$.

On pose $h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(x) - g(a)) \right]$

On a : • h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

• $h(a) = 0 = h(b)$

Par le Thm. de Rolle, $\exists c \in]a,b[$ t.q $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$

On en déduit : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ ∎

6.8.3 Règle de Bernoulli - L'Hôpital (B.H)

Thm. Soient f, g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ avec $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Si :

- $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$
- $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Alors $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Rmq (généralisation). La règle de B.H. s'applique aussi aux cas :
$\lim_{x \to b^-} \cdot$, $\lim_{x \to \pm\infty} \cdot$, et aux formes indéterminées $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (au lieu $\frac{0}{0}$).

Exemples :

1/ $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{(paire)}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \overset{BH(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x)}{1} = 1 .$$

2/ $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{\text{(paire)}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{BH(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

3) $$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \log(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x)}{1/x} \overset{BH(\frac{-\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

4/ $$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} \exp(x \log x) \overset{\text{car exp continue en 0}}{=} \exp\left(\lim_{x \to 0^+} x \log x\right) = \exp(0) = 1$$

(de manière générale : $a^b = \exp(b \cdot \log(a))$, $\forall a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.)

5/ Soit $c \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \log\left(1+\frac{c}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+c/x)}{1/x} \overset{BH(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-c/x^2}{1+c/x}}{-1/x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{c}{1+c/x} = c .$$

6) Soit $c \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{c}{n}\right)^n}_{\substack{\text{limite d'une suite} \\ (n \in \mathbb{N})}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{c}{x}\right)^x}_{\substack{\text{limite d'une fonction réelle} \\ (x \in \mathbb{R})}} = \lim_{x \to +\infty} \exp\Big(\overbrace{x \log\left(1+\frac{c}{x}\right)}^{\xrightarrow[x \to \infty]{} c}\Big) \overset{\text{car exp est continue}}{=} \exp(c)$$

Preuve de la règle de B-H :

- f, g sont dérivables sur $]a,b[$ donc continues sur $]a,b[$.
- On prolonge f et g par continuité en a (on pose $f(a) = g(a) = 0$) et alors f et g continues sur $[a,b[$.
- Soit (x_n) une suite dans $]a,b[$ telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$.
- Par le TAF généralisé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, u_n \in]a, x_n[$ t.q :

$$\frac{f'(u_n)}{g'(u_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} .$$

- Or $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ (par encadrement) et $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ (par hypothèse) $\Big\}$ implique que $\lim_{n\to+\infty} \frac{f'(u_n)}{g'(u_n)} = \ell$.
- Ainsi $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \ell$ et donc $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ ■

⚠ Si B.H ne s'applique pas, il se peut tout de même que la limite existe.

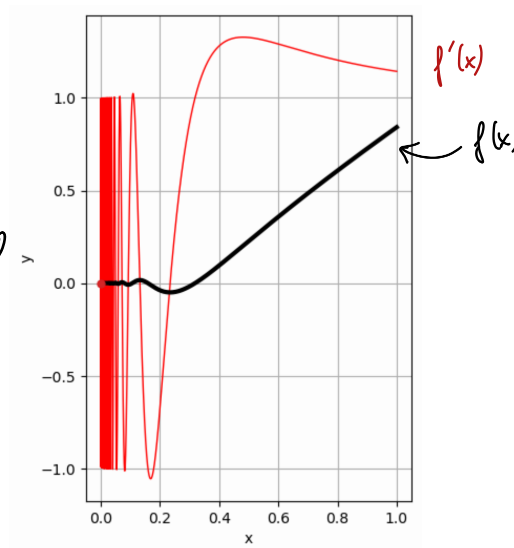
__Exemple:__ Soit $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x$. $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ indéterminée}\right)$.

- On a $\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$ n'existe pas ("à cause des oscillations de cos")
- Mais $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (par endrement : $-x \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x$)

6.9 Continuité de la fonction dérivée

- Il existe des fonctions dérivables sur intervalle dont la dérivée n'est pas continue.

__Exemple :__ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (prolongem^t par continuité.



- f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

  On a que $\lim_{x\to 0-} f'(x)$ n'existe pas et $\lim_{x\to 0+} f'(x)$ n'existe pas.
- Pour $x = 0$, on a : $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

⇝ Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f' n'est pas continue (en 0).

Fin 18/11