Exercice (A déposer sur Moodle au plus tard le 28 novembre à 23h59.)**.**
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
On appelle c un **point fixe** de f.

Solution.

Rappel : théorème de la valeur intermédiaire. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est à dire*

$$\forall h \in [f(a), f(b)] \quad (\textit{ou } h \in [f(b), f(a)]), \quad \exists c \in [a, b] \textit{ tel que } f(c) = h.$$

Puisque l'image de f est dans l'intervalle $[a, b]$, nous avons

$$a \leq f(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{1}$$

Soit la fonction

$$g(x) := f(x) - x, \quad \forall x \in [a, b].$$

Puisque f est continue, g est aussi continue car somme de fonctions continues ; de plus, par l'inégalité (1), g satisfait

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \qquad \textit{et} \qquad g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de la valeur intermédiaire : puisque $0 \in [g(b); g(a)]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire $f(c) = c$.