EPFL

Ens. : Analyse I
Analyse I - MA
Automne 2022
Durée : 1 heures

1

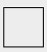
Student One

SCIPER : **111111**

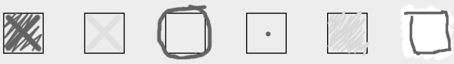
Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
		

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Nom, Prénom, section :

Question 1:

Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) := x\,e^{-x/5}$. Montrer qu'il existe $x_* > 0$ tel que $f(x_*) = 1$. On donnera une justification complète. Si des résultats du cours sont utilisés, on les énoncera.

Solution :

Rappelons d'abord le théorème de la valeur intermédiaire:
Theorème: *Soient $a < b$ et $f \in C^0([a,b])$. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.*

Pour montrer l'existence de x_*, on va vérifier que f satisfait les conditions du théorème avec deux valeurs a et b telles que $f(a) < 1 < f(b)$. La fonction f vaut 0 en 0 et $f(5) = 5e^{-1} > 1$ en 5. De plus, $f \in C^0([a,b])$.
Posons $a = 0$, $b = 5$ et $y = 1 \in [0,5]$. On a bien $f(0) < 1 < f(5)$. On peut donc appliquer le théorème pour montrer qu'il existe $x_* \in [0,5]$ tel que $f(x_*) = 1$. De plus, $x_* \neq 0$ car $f(0) = 0$, donc $x_* \neq 0$. On a donc bien trouvé une valeur $x_* > 0$ telle que $f(x_*) = 1$. Pour montrer l'existence de $x_* > 0$ tel que $f(x_*) = 1$, on va vérifier que f satisfait les conditions du théorème avec deux valeurs a et b telles que $f(a) < 1 < f(b)$.

La fonction f vaut

- *en $x = 0$: $f(0) = 0e^{-0/5} = 0$*
- *en $x = 5$: $f(5) = 5 \cdot e > 1$.*

De plus, $f \in C^0([a,b])$ car c'est une composition de fonctions continues.
Posons $a = 0$, $b = 5$ et $y = 1 \in [0,5]$. On a bien $f(0) < 1 < f(5)$. On peut donc appliquer le théorème de la valeur intermédiaire qui dit qu'il existe $x_* \in [0,5]$ tel que $f(x_*) = 1$.
Précisons que $x_* \neq 0$ car $f(0) = 0$, donc $x_* \neq 0$. On a donc démontré qu'il existe un $x_* > 0$ telle que $f(x_*) = 1$.

Question 2:

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

(a) Montrez, en utilisant un ou des résultats du cours, que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0,1[$.

(b) Donnez un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0,1[$.

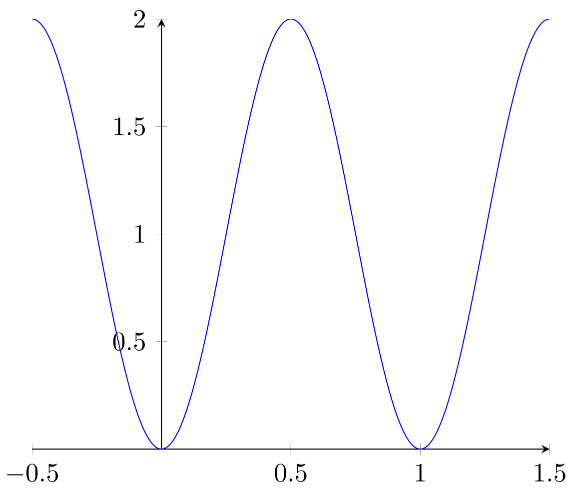
Solution : *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.*

(a) Montrons que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0,1[$. Rappelons d'abord le théorème de Rolle:
Theorème: *Soient $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ et puisque $f(0) = f(1) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle pour montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 0$. On applique à nouveau le théorème de Rolle à la fonction f' (qui est aussi $\mathcal{C}^\infty$) sur les deux tronçons $[0,c]$ et $[c,1]$. Puisque $f'(0) = f'(c) = 0$, il existe $a \in]0,c[$ tel que $f''(a) = 0$. De même, comme $f'(c) = f'(1) = 0$, il existe $b \in]c,1[$ tel que $f''(b) = 0$. Comme $a < c < b$, on a bien trouvé $a \neq b$ sur $]0,1[$ avec $f''(a) = f''(b) = 0$.

(b) Pour donner un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus et où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0,1[$, on cherche une fonction qui a deux minimums locaux (respectivement maximum locaux) en 0 et 1 et un maximum local (respectivement minimum local) entre les deux.

Par exemple, la fonction $f(x) = \sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + 1$ satisfait ces conditions.



La deuxième dérivée de $\sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + 1$ est $4\cos(2\pi x)$, qui vaut 0 lorsque $x = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, n \in \mathbb{Z}$. Sur $[0,1]$, on a exactement deux zéros, $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

Question 3:

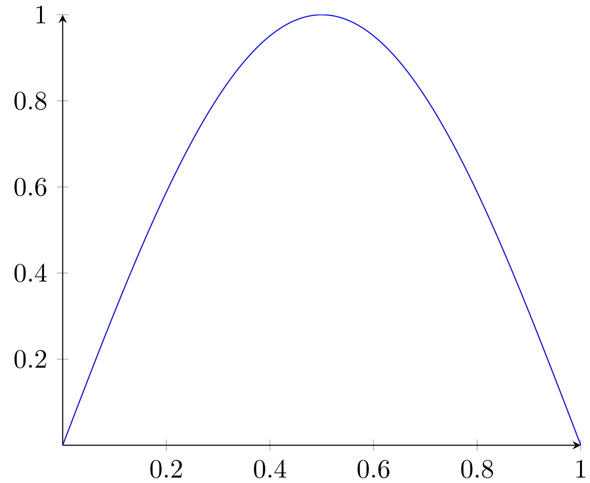
Soit $f\colon\ ]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a un maximum local strict en $x \in]0,1[$ s'il existe un $\alpha > 0$ tel que $f(y) < f(x)$ pour tout $y \in]0,1[$ avec $0 < |y - x| < \alpha$.

(a) Donnez un exemple de fonction continue explicite $f\colon\ ]0,1[\to \mathbb{R}$ qui a un maximum local strict.

(b) Donnez un exemple de fonction continue explicite $f\colon\ ]0,1[\to \mathbb{R}$ qui a un nombre infini de maximums locaux stricts.

Solution : *Soit $f\colon\ ]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a un maximum local strict en $x \in]0,1[$ s'il existe un $\alpha > 0$ tel que $f(y) < f(x)$ pour tout $y \in]0,1[$ avec $0 < |y - x| < \alpha$.*

(a) On cherche une fonction continue $f\colon\ ]0,1[\to \mathbb{R}$ qui a un (unique) maximum local strict. Pour cela, on aimerait une fonction qui croit entre 0 et le maximum local, et décroit entre le maximum local et 1. Par exemple, la fonction $\sin(\pi x)$ admet un maximum local en $\frac{1}{2}$. En effet, on peut le vérifier avec la définition ci-dessus. Posons $\alpha = 0.5$ et soit $y \in]0,1[$ tel que $|y - 0.5| < \alpha$, i.e., $y \in]0,1[$. Alors $\sin(y) \leq \sin(0.5)$.



(b) Pour trouver un exemple de fonction continue $f\colon\ ]0,1[\to \mathbb{R}$ qui a un nombre infini de maximums locaux stricts, on doit chercher une fonction qui oscille un nombre infini de fois entre 0 et 1. Par exemple, la fonction $\sin(\frac{1}{x})$ possède un nombre infini de maximums locaux sur $]0,1[$. En effet, $\sin(\frac{1}{x})$ est maximal si et seulement si

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
$$\Longleftrightarrow x = \frac{2}{\pi + 4\pi n}, n \in \mathbb{Z}.$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $\frac{2}{\pi+4\pi n} \in]0,1[$. Il y a donc un nombre infini de maximums locaux.