

- Un signal est une **fonction**  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Un signal particulier : la **sinusoïde**  $X(t) = a \cdot \sin(2\pi ft + \delta)$
- Un paramètre particulièrement important : la **fréquence**  $f$
- Joseph Fourier : **Tout signal est une somme de sinusoïdes !**
- La **bande passante** d'un signal est sa plus haute fréquence.
- Deux techniques de traitement des signaux :
  - **Le filtrage**, pour supprimer ou atténuer les hautes fréquences (filtre passe-bas)
  - **L'échantillonnage**, pour numériser le signal



# Information, Calcul et Communication

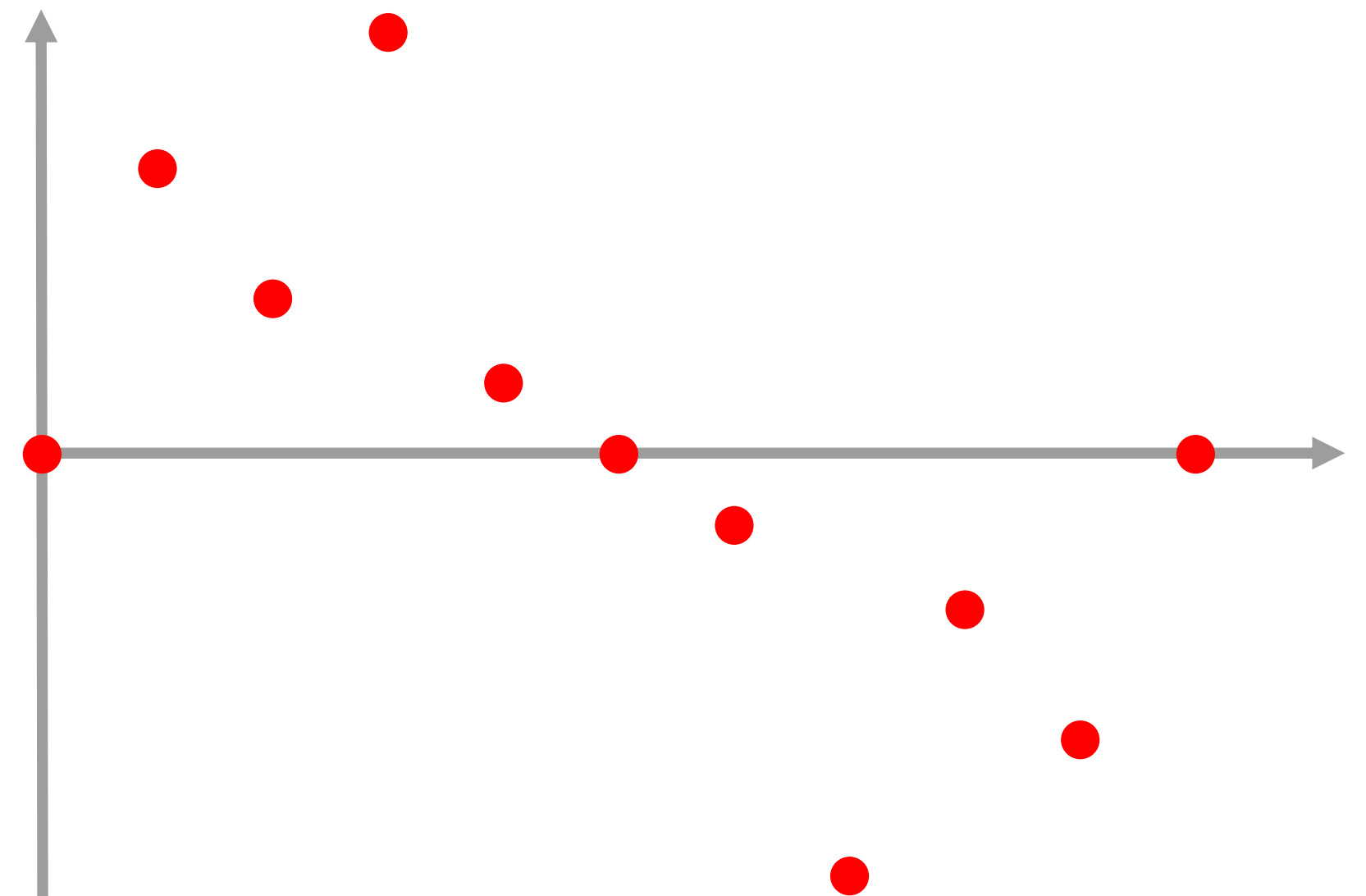
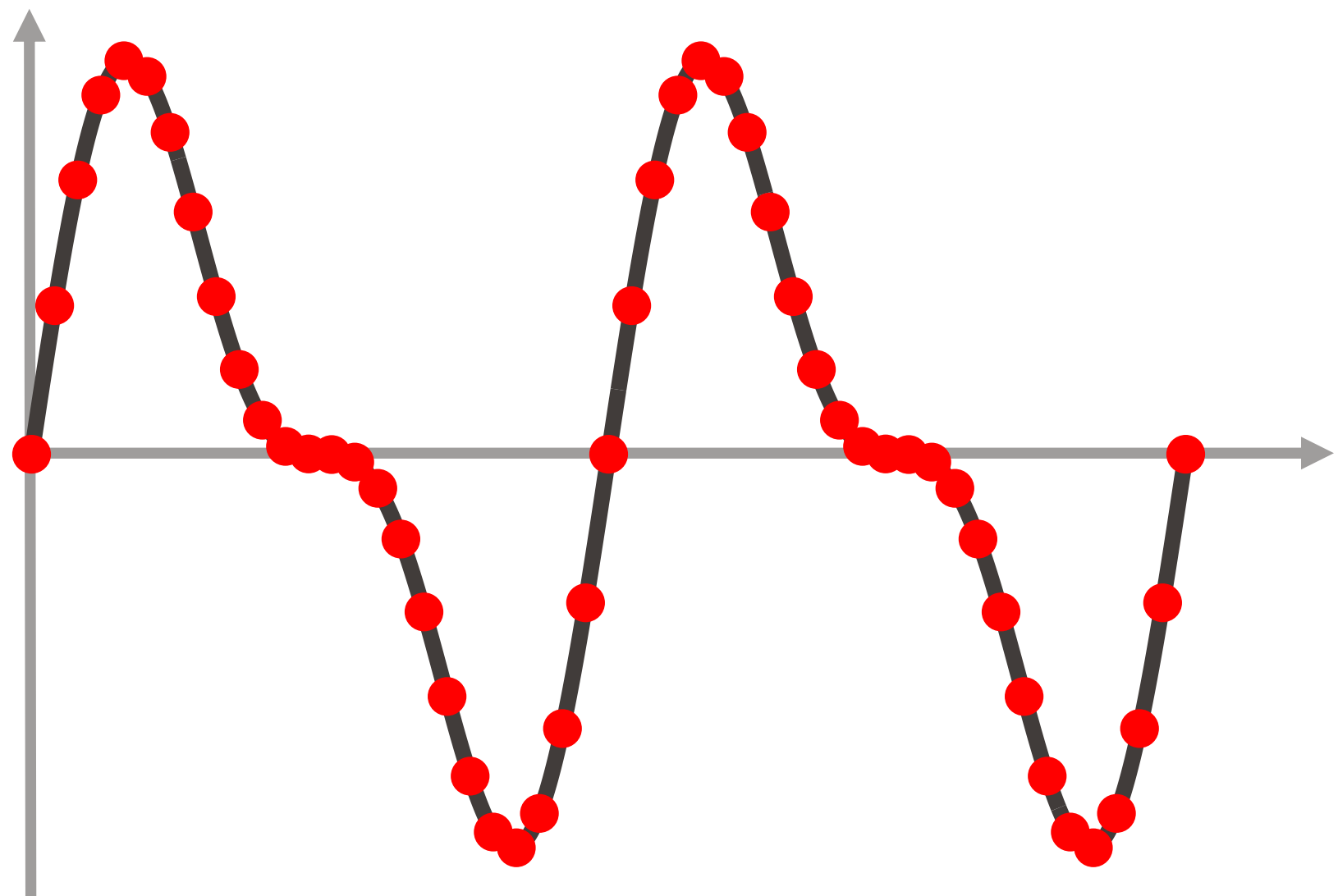
## Reconstruction de signaux

Olivier Lévêque

# Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal  $(X(t), t \in \mathbb{R})$  à partir de sa version échantillonnée  $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$  ?

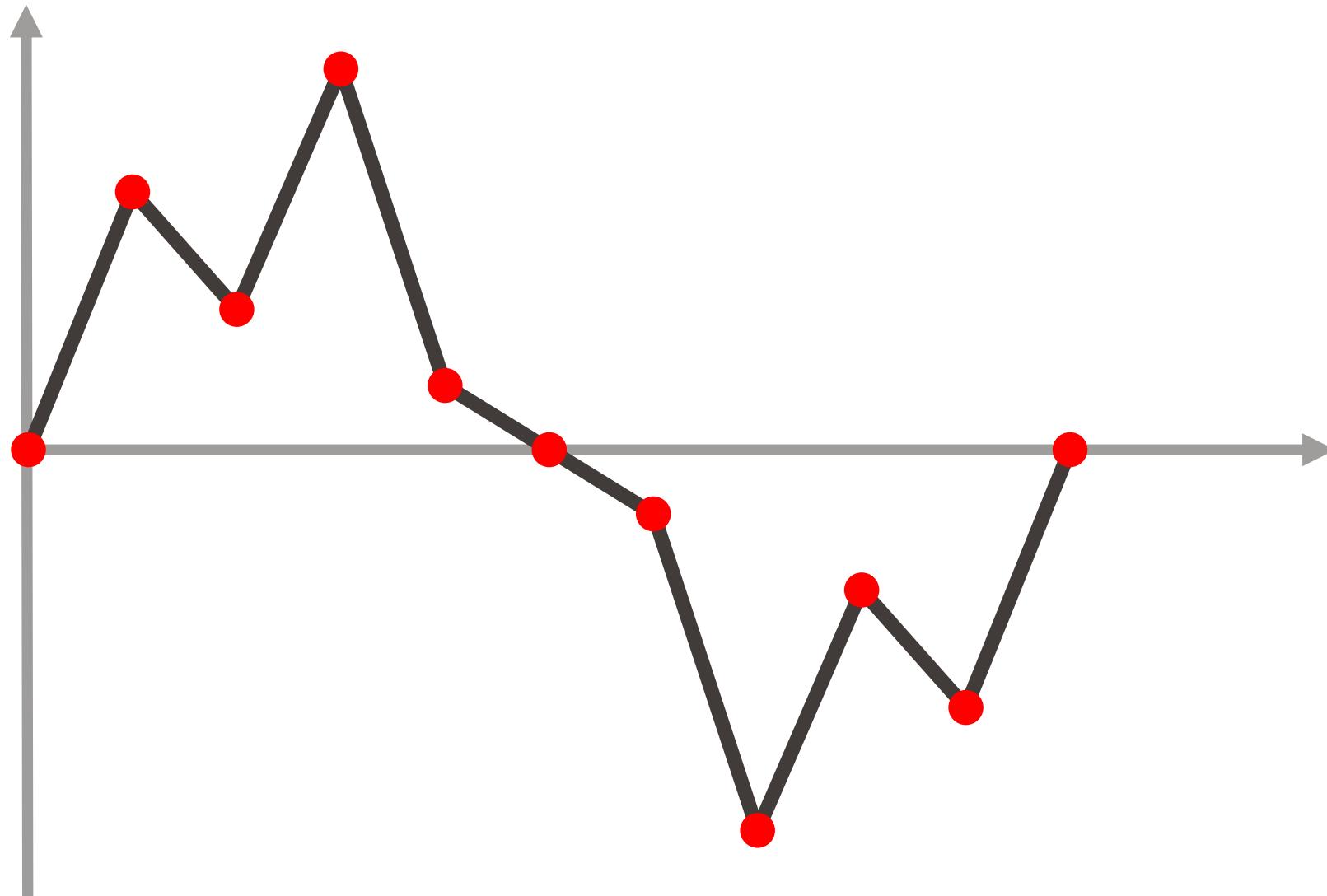
- Dans certains cas, c'est assez clair...
- Dans d'autres, ça l'est un peu moins !



# Tentatives d'interpolation

Premières tentatives pour **interpoler** un signal :

1. Relier les points par des **segments de droites** :



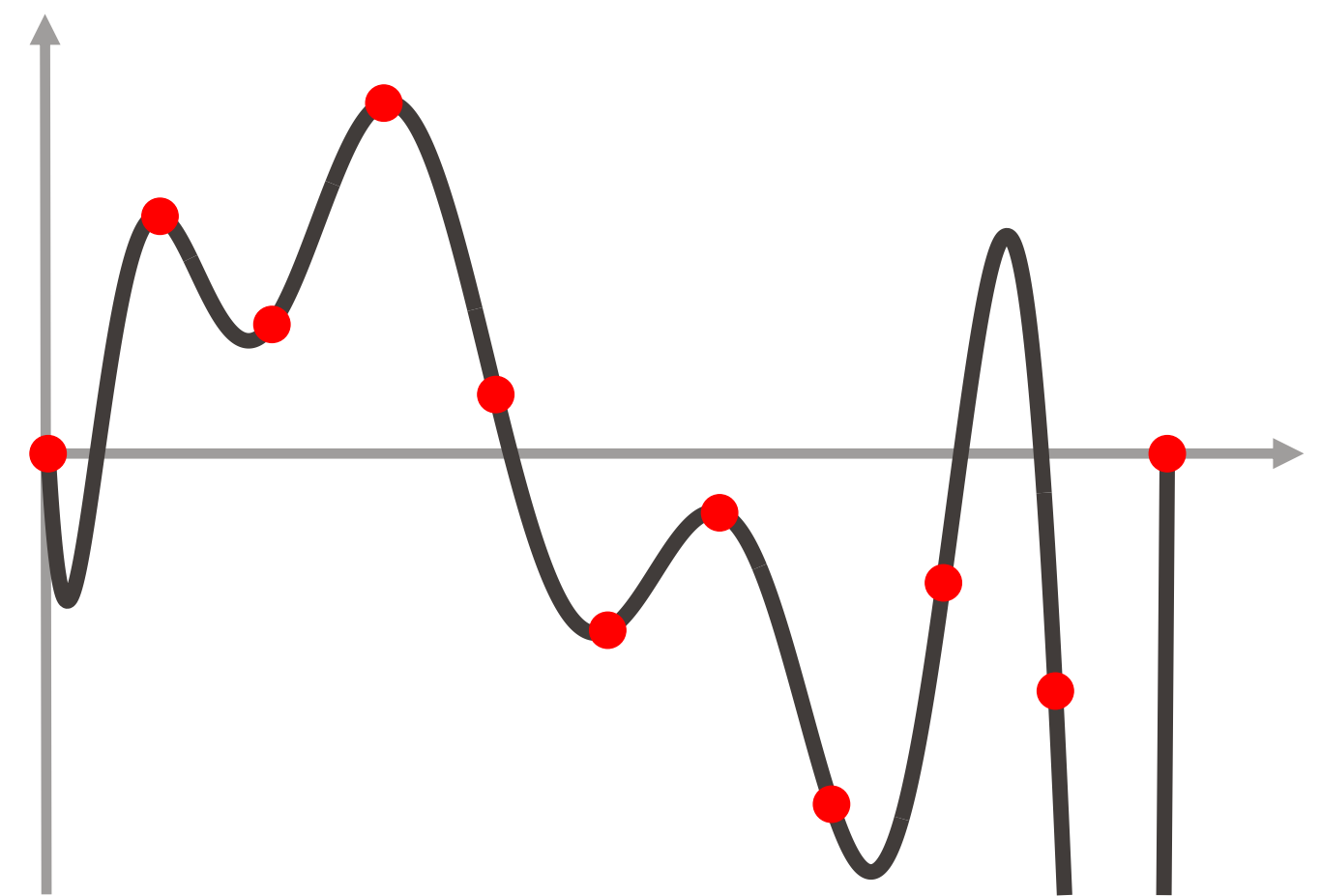
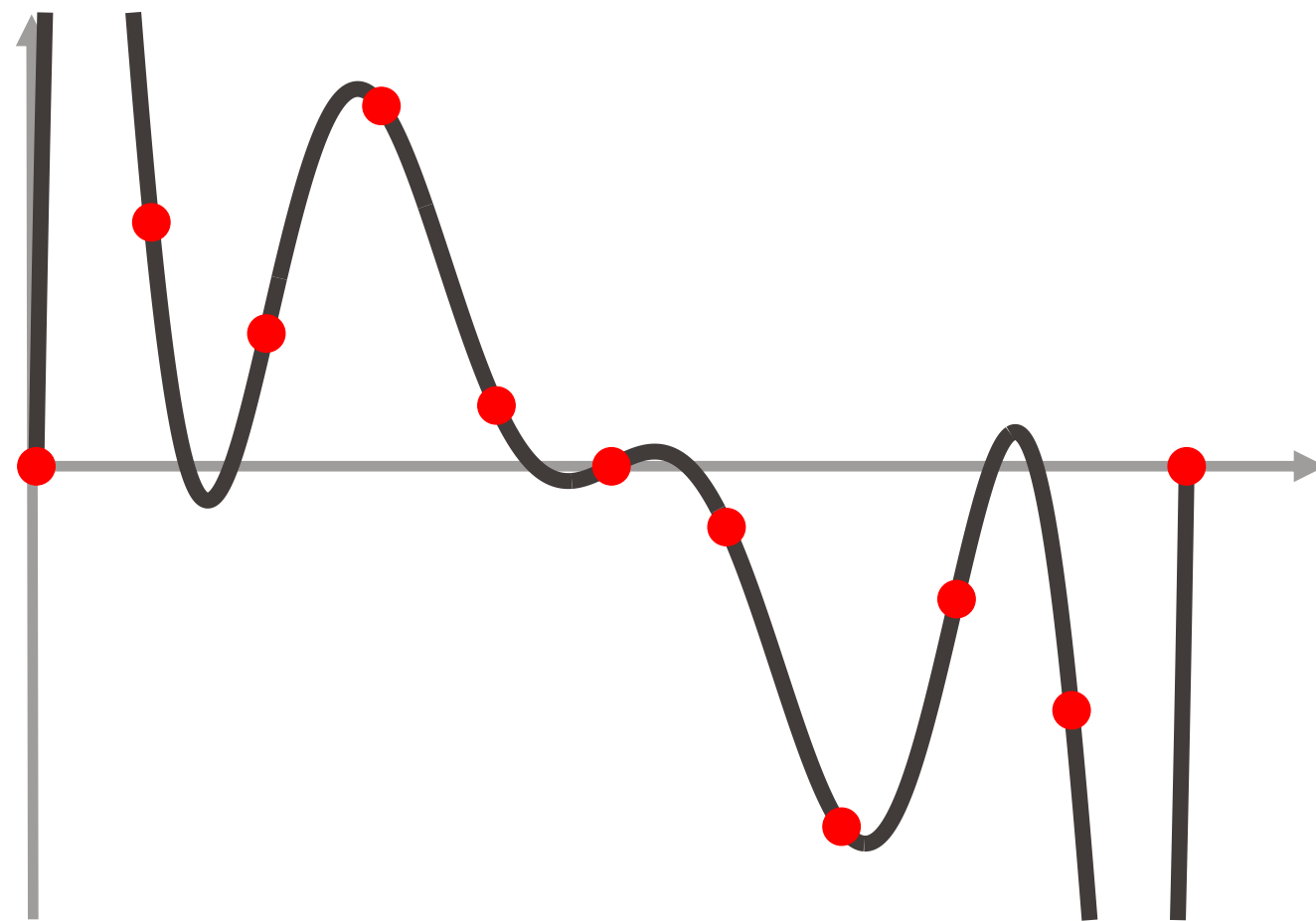
- Un défaut principal : la "courbe" obtenue n'est pas régulière.

# Tentatives d'interpolation

2. Trouver un **polynôme** qui passe par tous les points.

Deux défauts principaux :

- Avec  $N$  points, il faut trouver un polynôme de degré  $N - 1$  : la procédure est **compliquée** !
- Elle est également **instable** : si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.



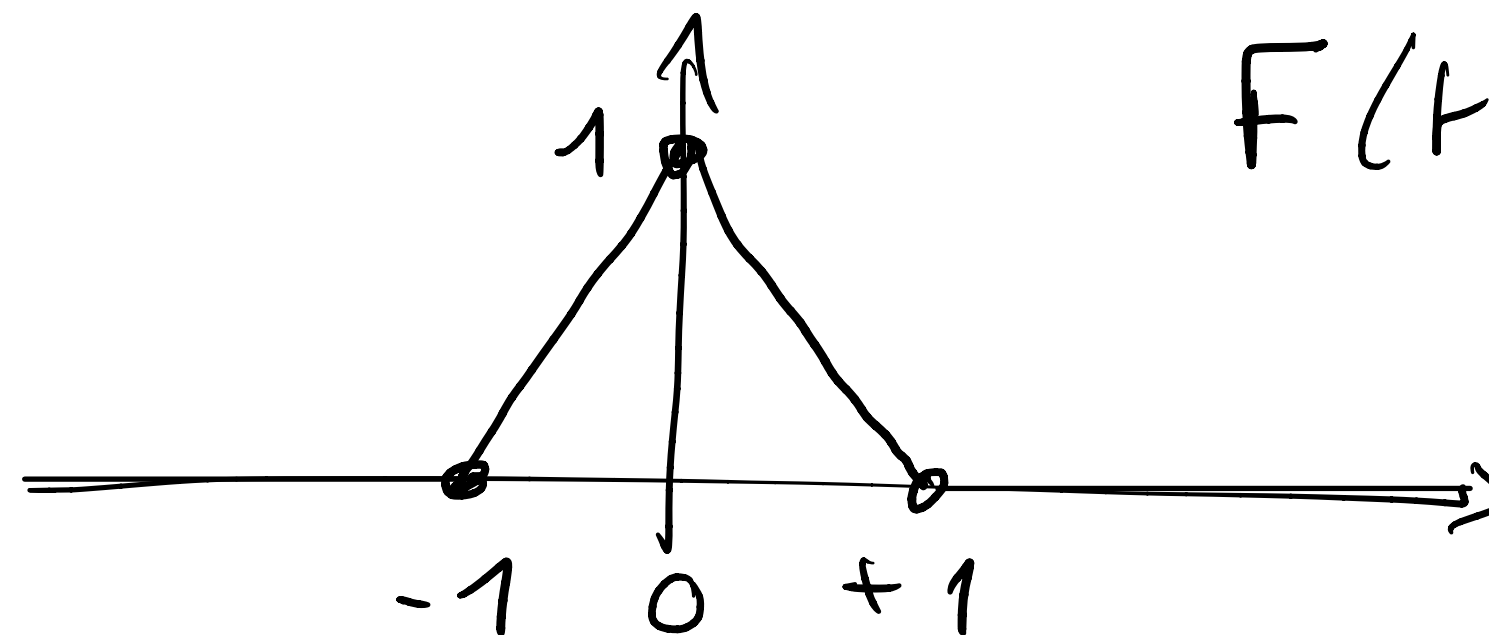
3. De manière générale, une **formule d'interpolation** pour  $X(t)$  s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

où  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \text{ et } F(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad (k \text{ entier non nul})$$

1<sup>er</sup> ex :



$$F(t) = h_i(t)$$

3. De manière générale, une **formule d'interpolation** pour  $X(t)$  s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

où  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad (k \text{ entier non nul})$$

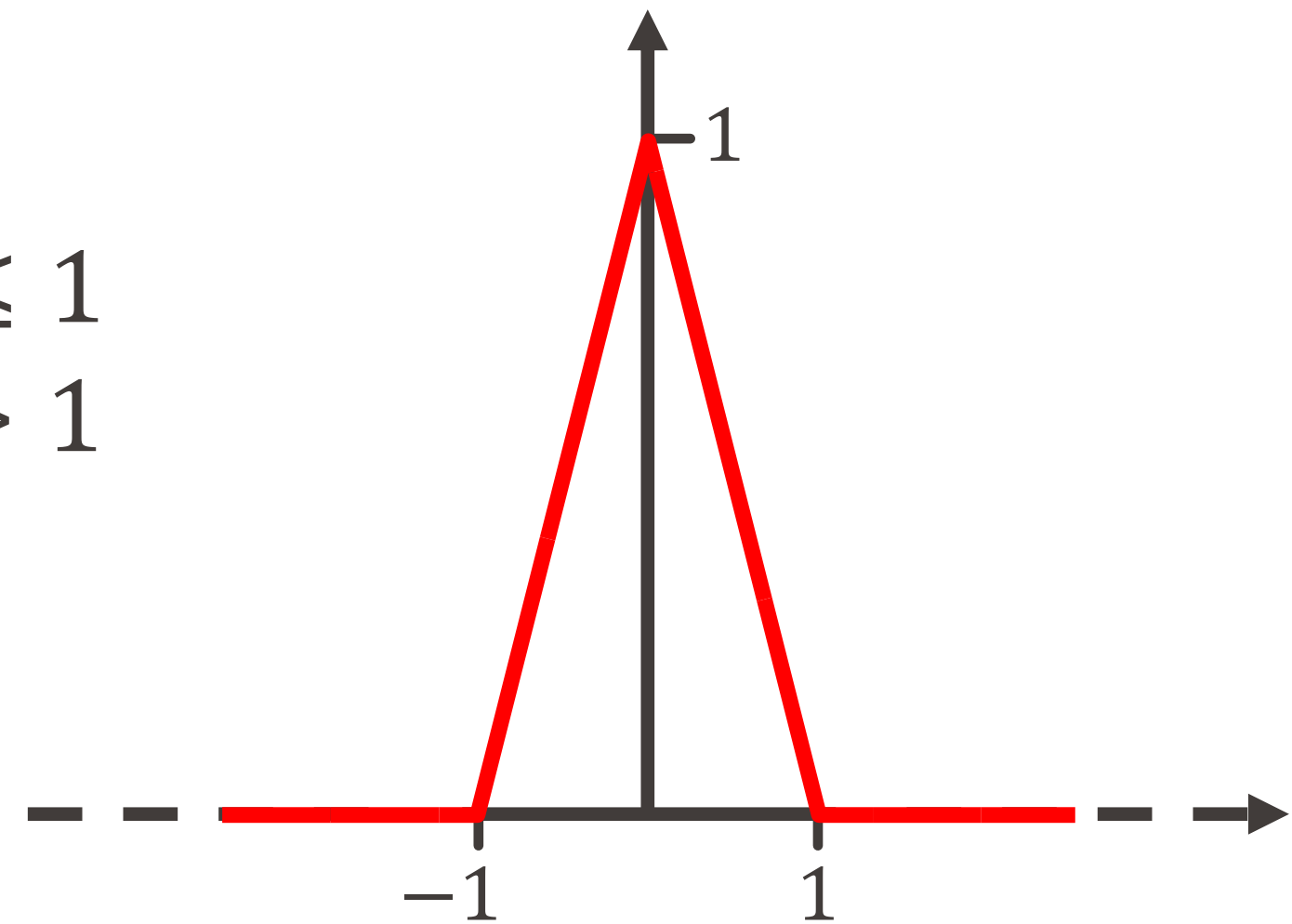
Cette condition implique en particulier que :  $X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$

**La question est maintenant : quelle fonction  $F$  choisir ?**

# Formule d'interpolation avec $\text{tri}(t)$

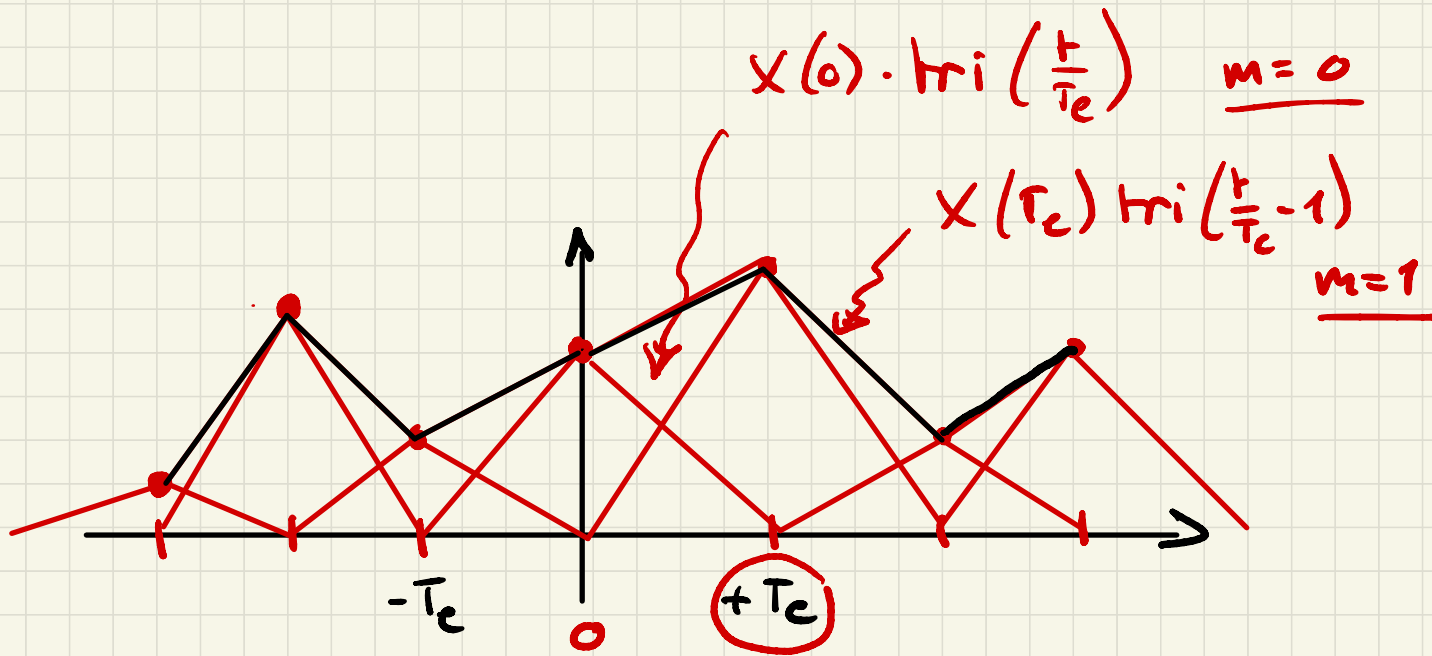
- La fonction  $F$  qui permet de relier les points par des segments est :

$$F(t) = \text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$



$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$





$$\begin{aligned}
 X_I(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(mT_e) \cdot \underbrace{\text{tri}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)} \\
 &= \text{tri}\left(\frac{t}{T_e} - m\right)
 \end{aligned}$$

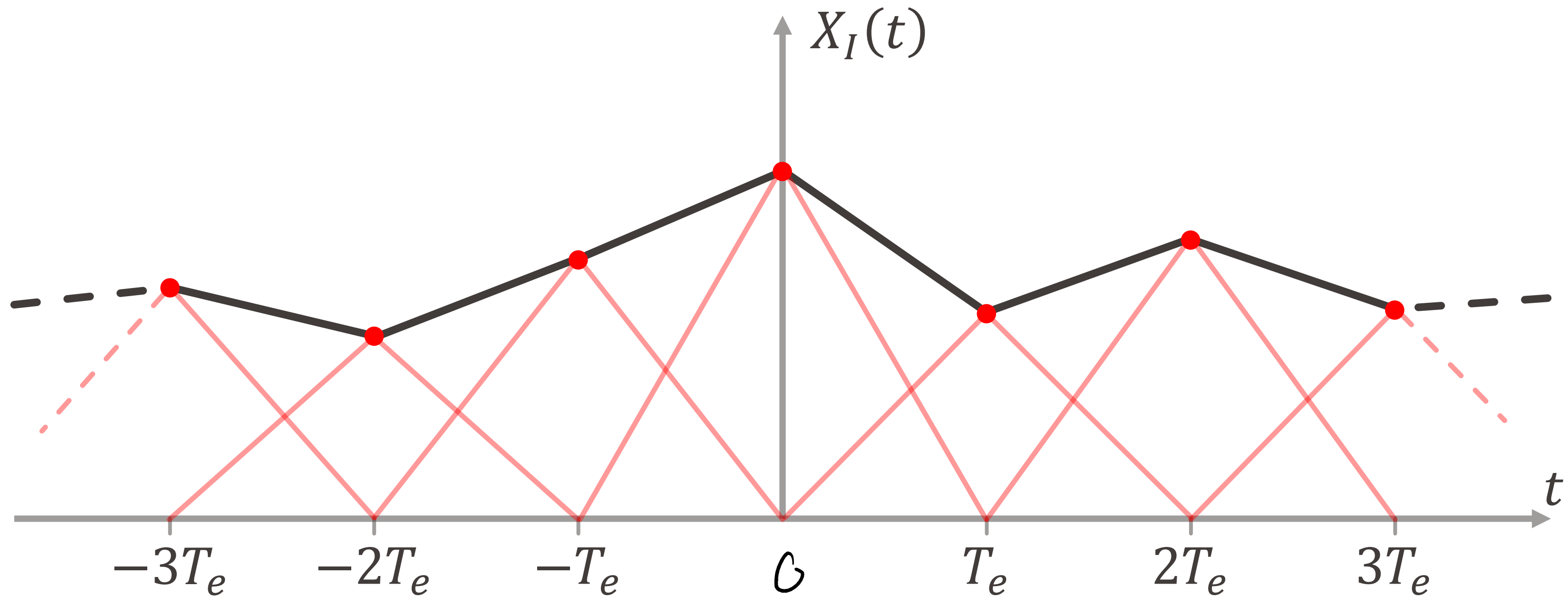
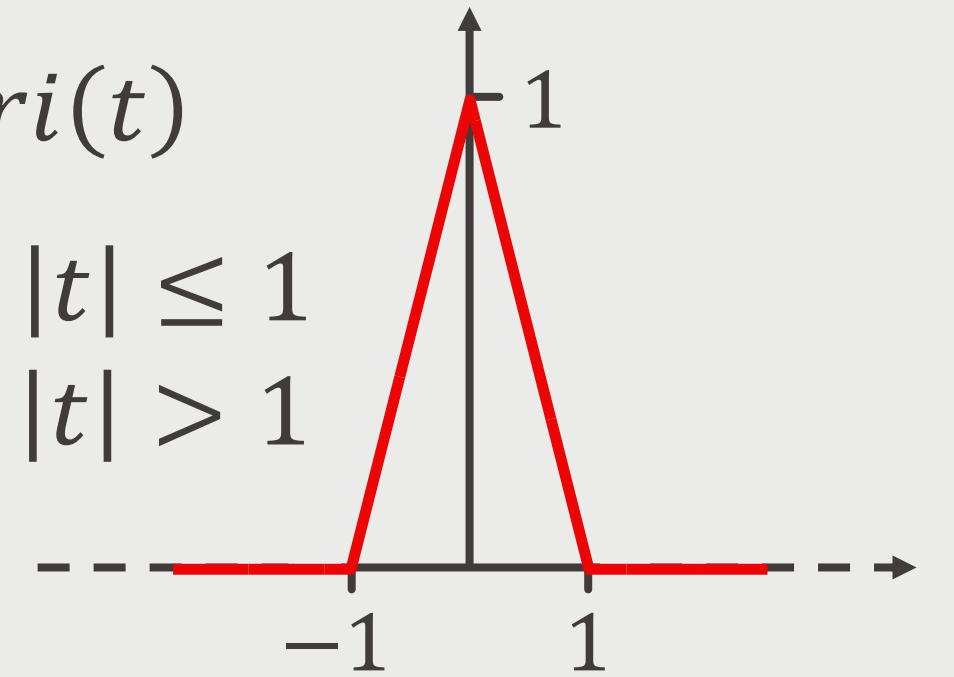
# Exemple

## Formule d'interpolation

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

## Fonction $tri(t)$

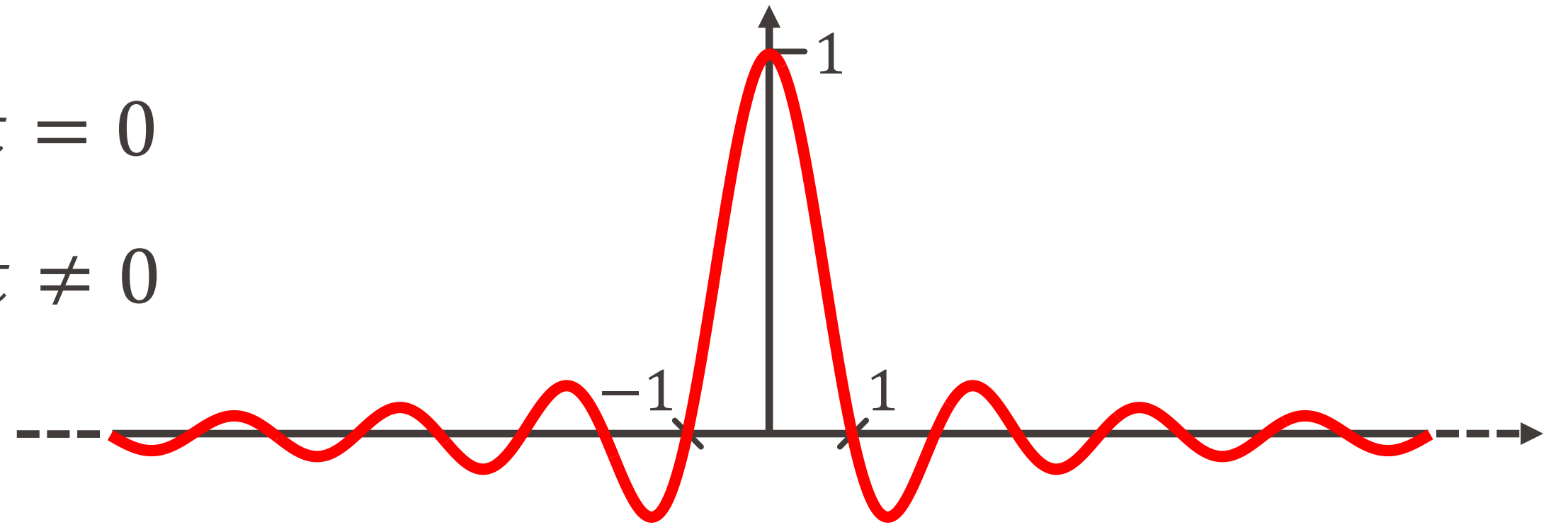
$$F(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$



# Formule d'interpolation avec $\text{sinc}(t)$

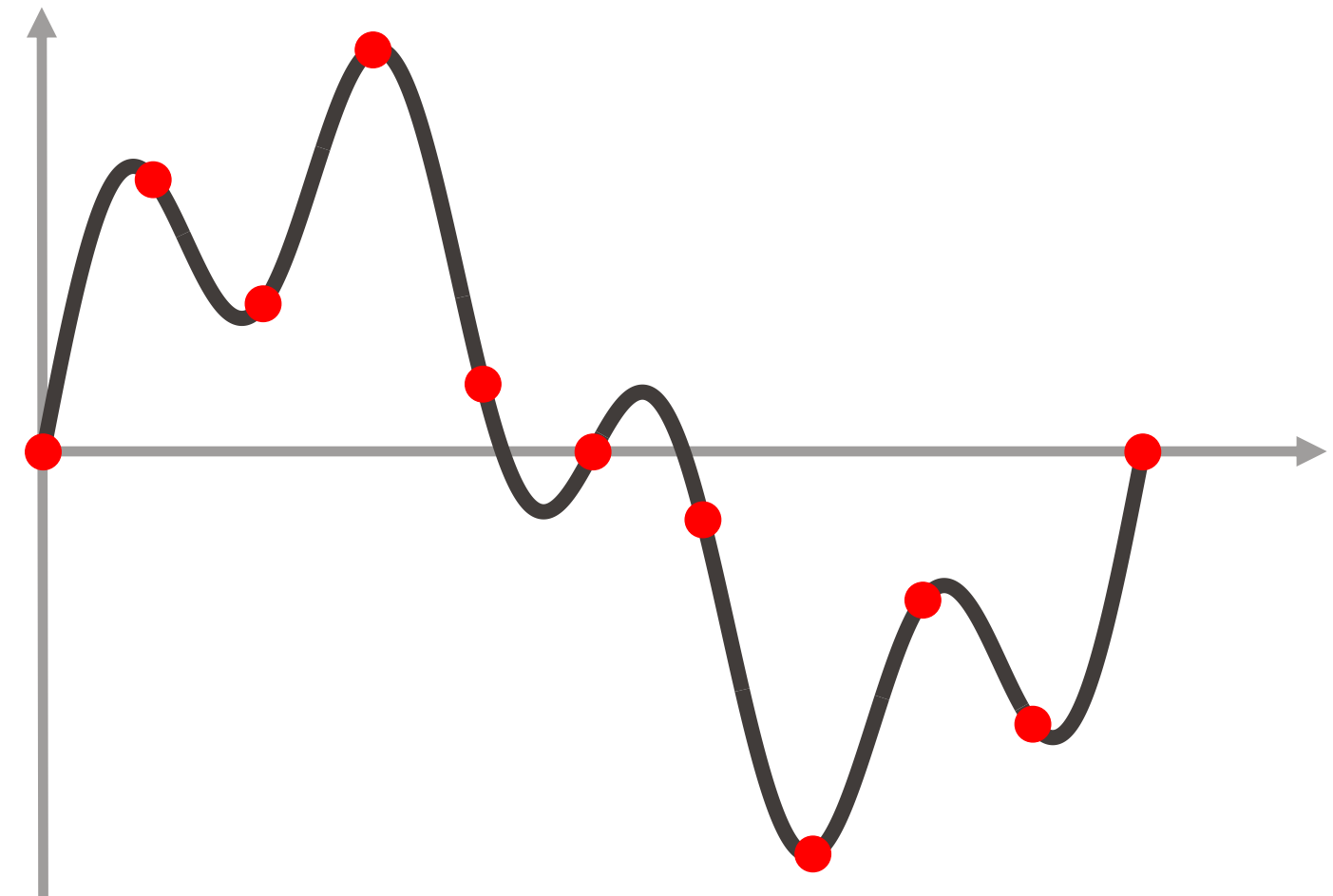
- Il se trouve qu'un bien meilleur choix pour la fonction  $F$  est

$$F(t) = \text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$



Ce qui donne dans notre exemple :

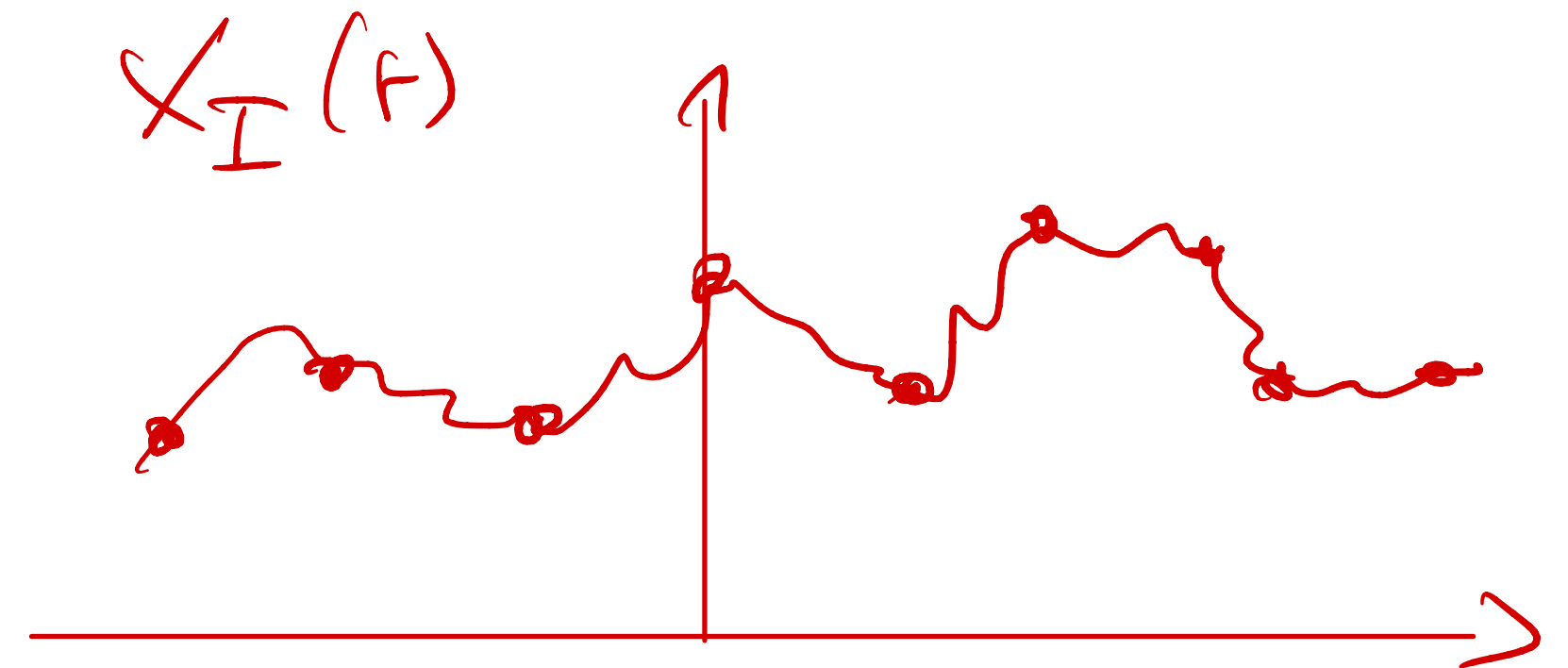
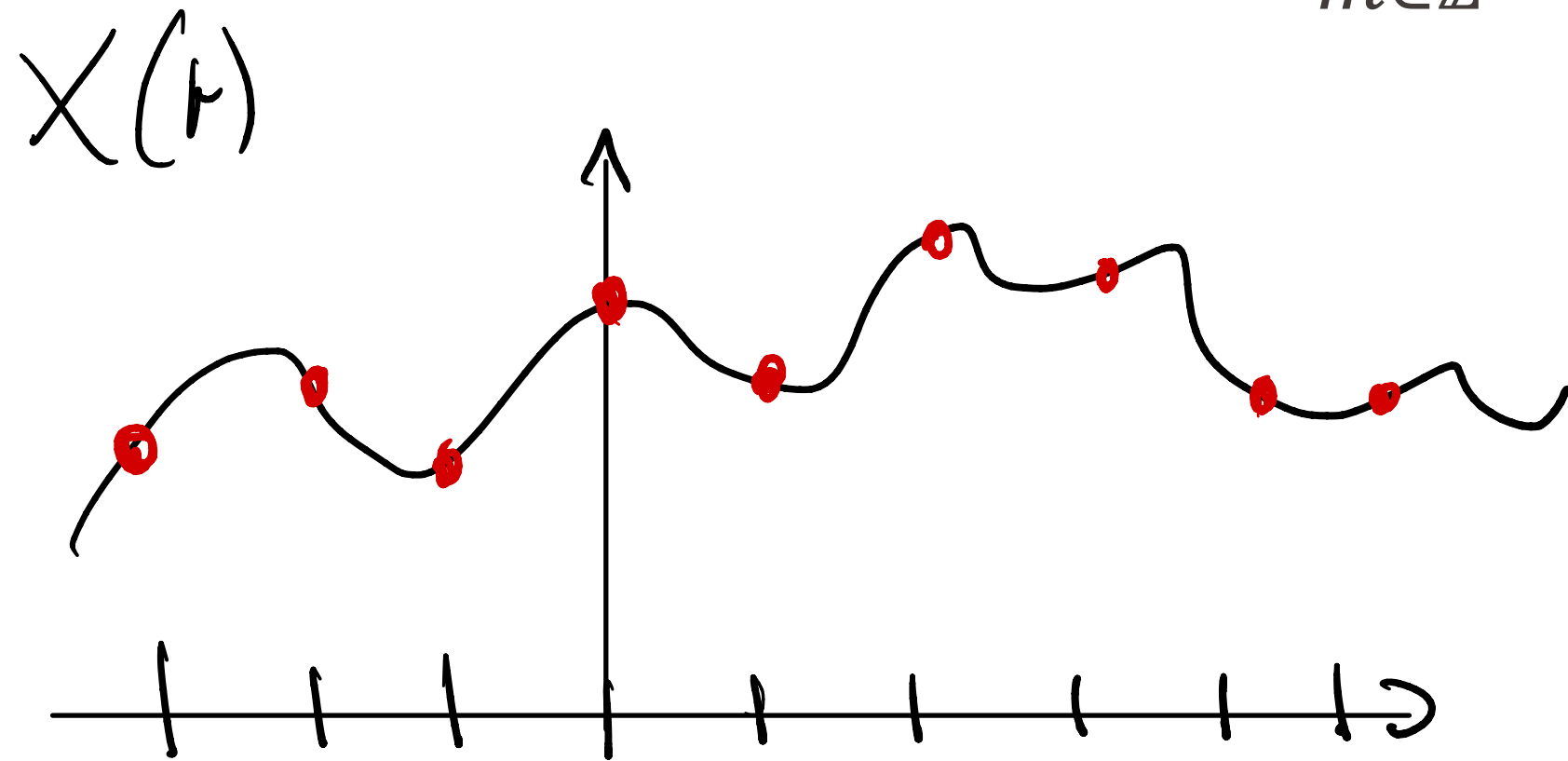
$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



# Formule d'interpolation

- À partir des échantillons  $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$ , nous construisons donc le signal interpolé  $X_I(t)$  grâce à la **formule d'interpolation** :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



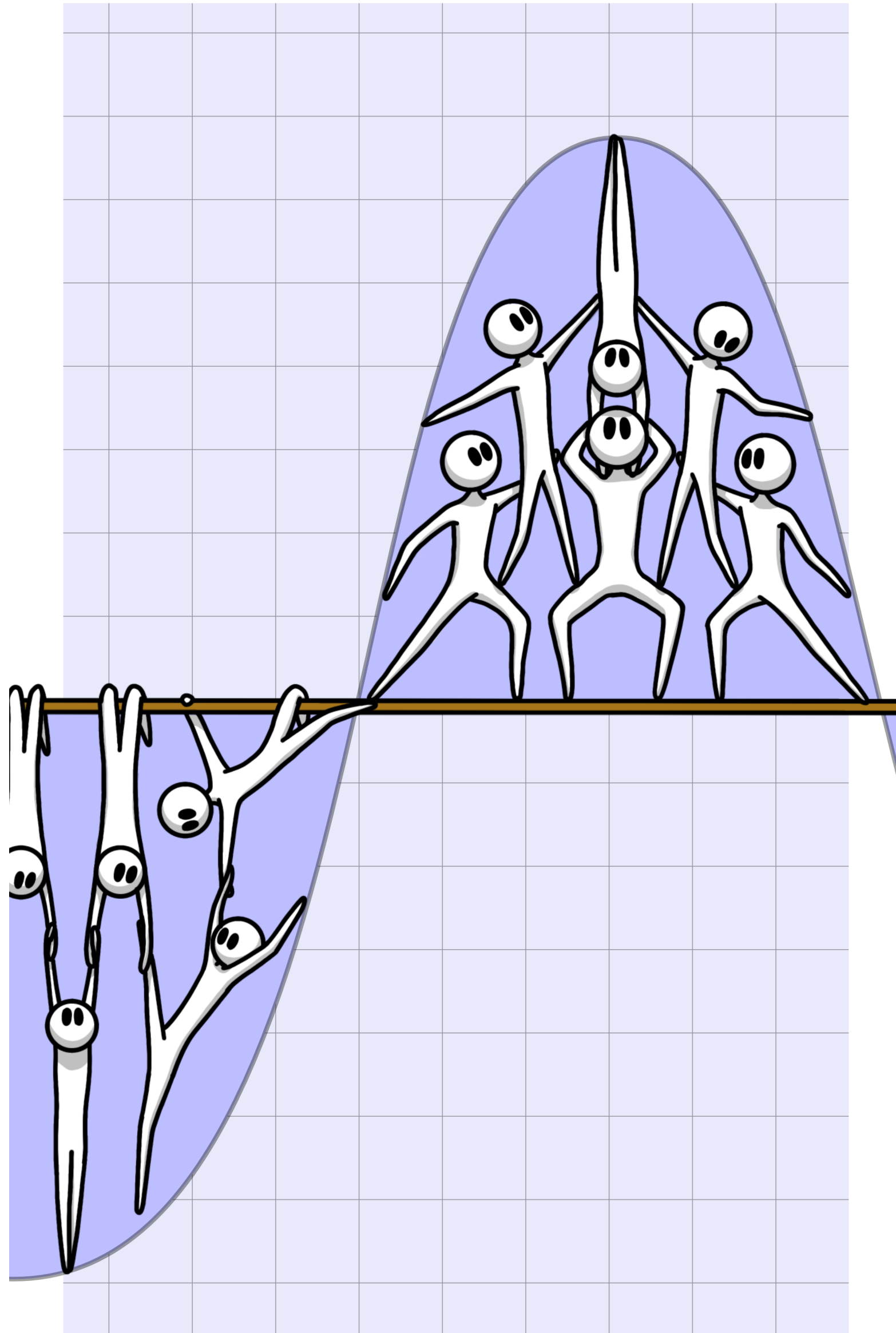
# Formule d'interpolation

- À partir des échantillons  $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$ , nous construisons donc le signal interpolé  $X_I(t)$  grâce à la **formule d'interpolation** :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

- Il nous reste maintenant une question cruciale à résoudre :

**Quand est-ce que  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ?**



# Information, Calcul et Communication

Le théorème  
d'échantillonnage

Olivier Lévêque

# Le théorème d'échantillonnage : historique



Edmund Taylor Whittaker  
1873 - 1956



Harry Nyquist  
1889 - 1979



Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov  
1908 - 2005



Herbert Raabe  
1909 - 2004



Claude Edwood Shannon  
1916 - 2001

# Énoncé du théorème d'échantillonnage

Soient :

- $(X(t), t \in \mathbb{R})$  un signal dont la bande passante (= la plus grande fréquence) vaut  $f_{max}$
- $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$  le même signal échantillonné avec une période  $T_e$  (et soit  $f_e$  la fréquence correspondante :  $f_e = 1/T_e$ )
- On pose encore  $X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$  pour  $t \in \mathbb{R}$

Alors :

- Si  $f_e > 2f_{max}$ , alors  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Si  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , alors  $f_e \geq 2f_{max}$
- eq. Si  $f_e < 2f_{max}$ , alors  $\exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } X_I(t) \neq X(t)$



# Illustration du théorème en pratique

- Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

- La version échantillonnée de ce signal est :  $X(mT_e) = \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e)$  et la formule d'interpolation devient :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

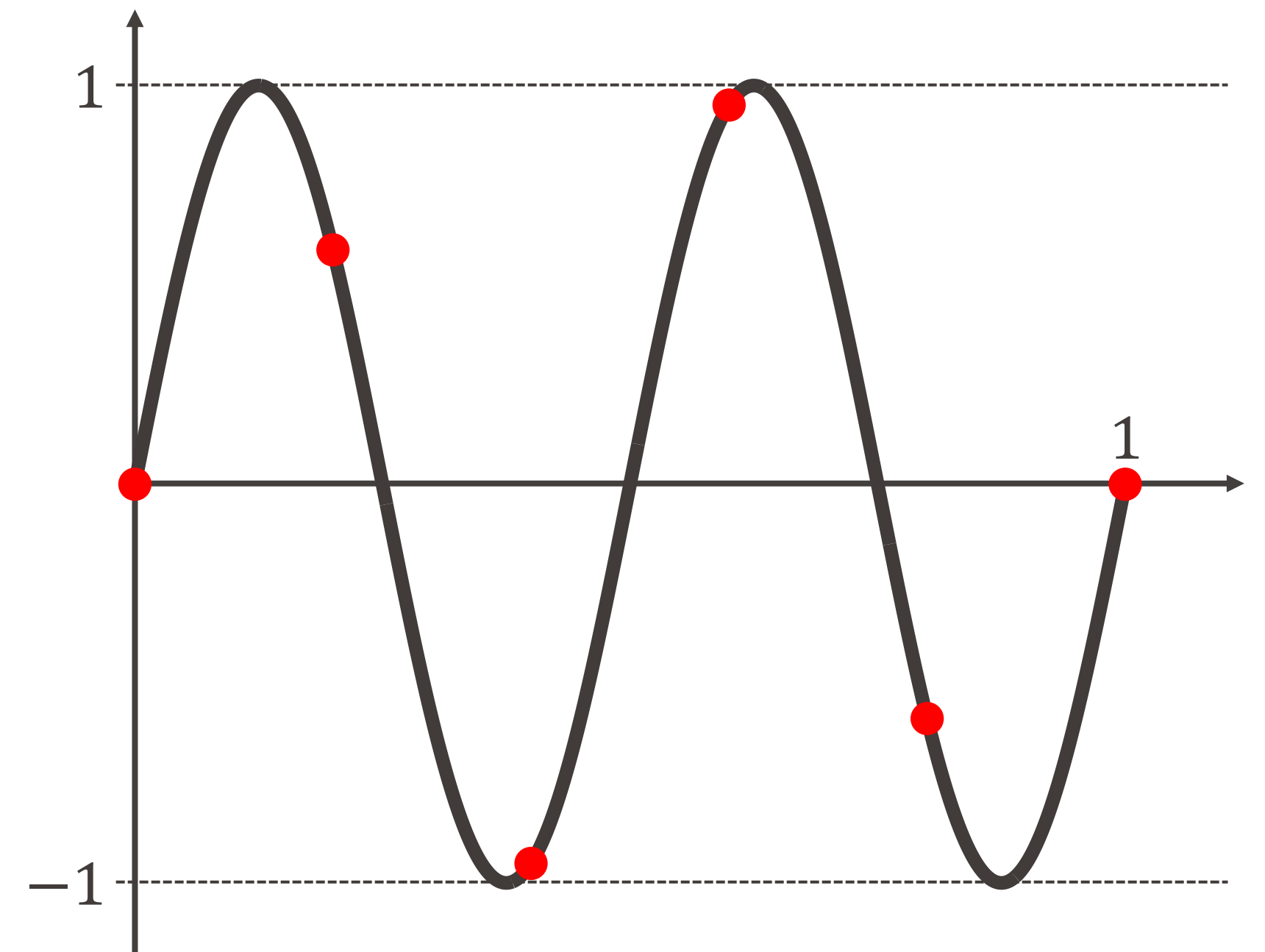
- En pratique, on se limite à quelques termes de la somme :

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \approx \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

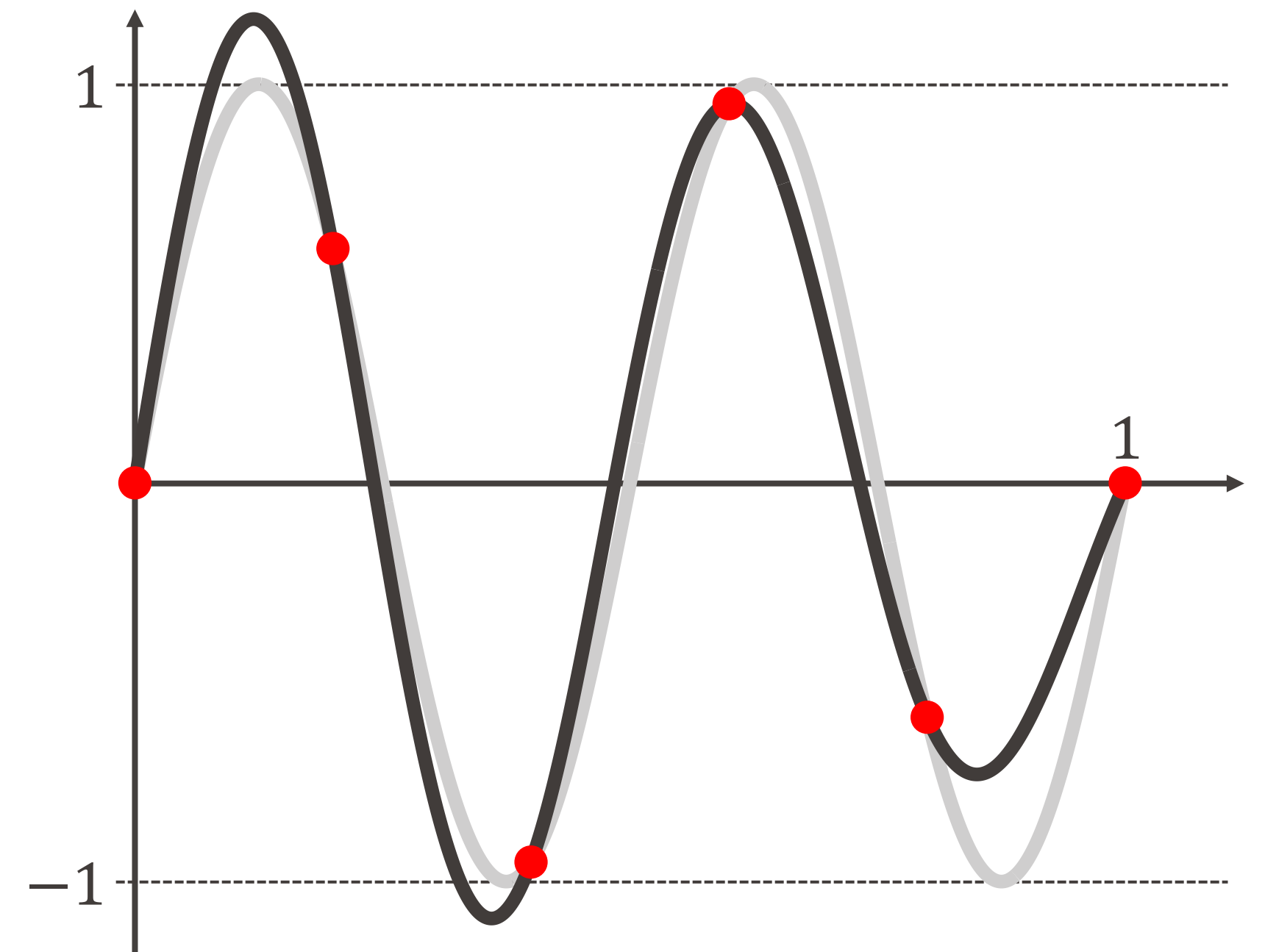
Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 2 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :



$$X_I(t) \approx \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 2 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :

Avec  $N = 5$

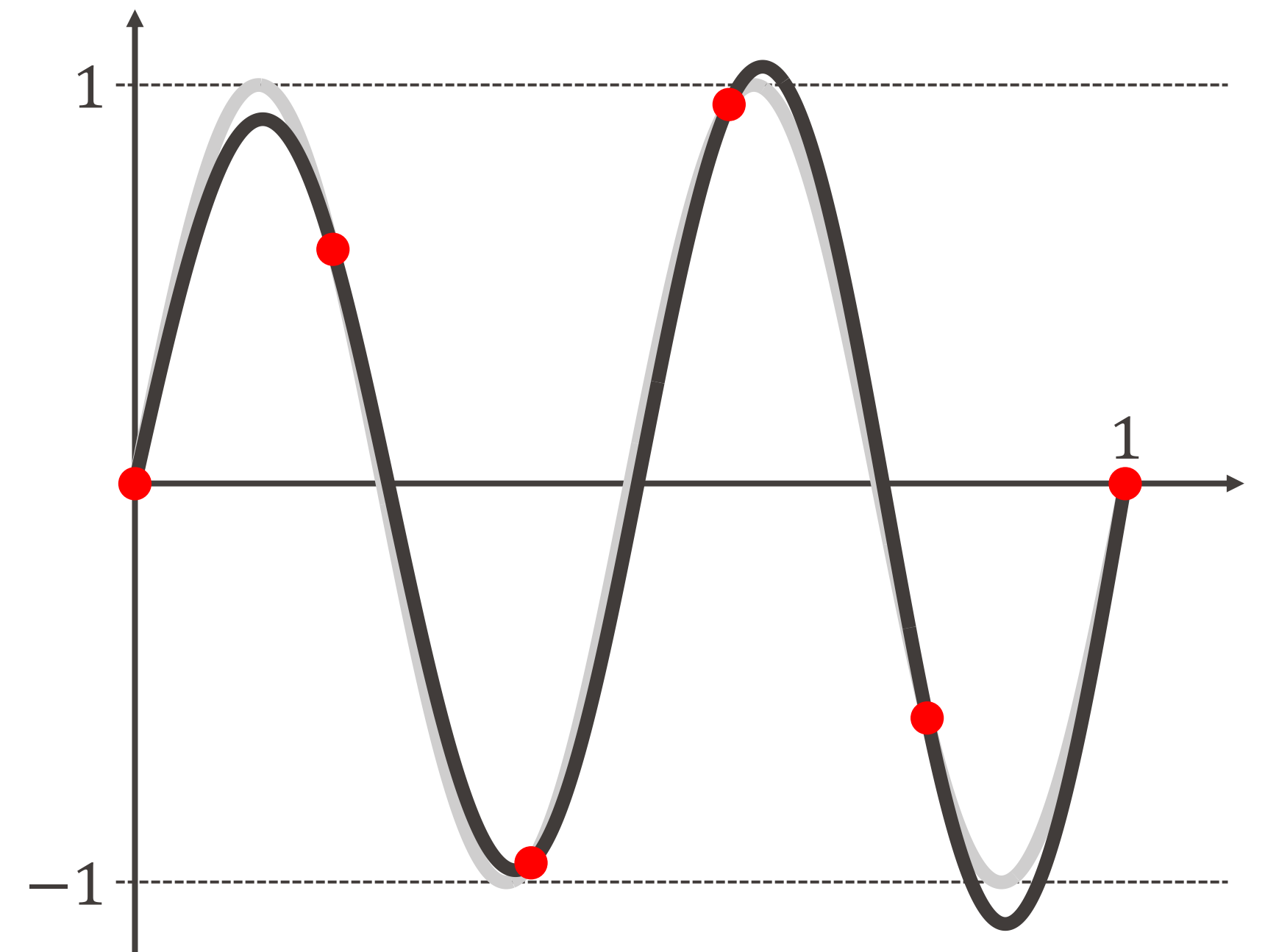


# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \approx \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 2 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :

Avec  $N = 10$

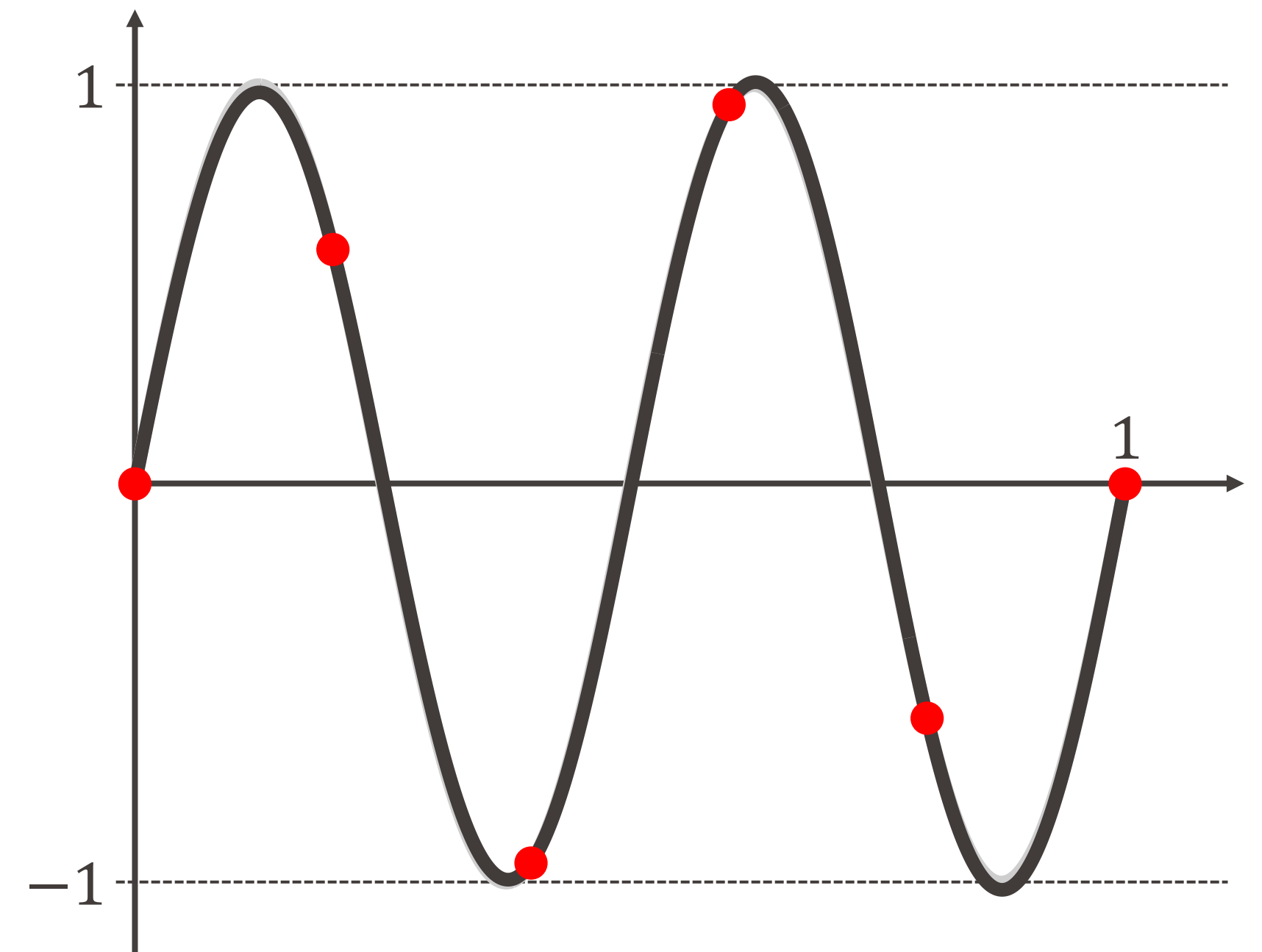


# Illustration du théorème en pratique

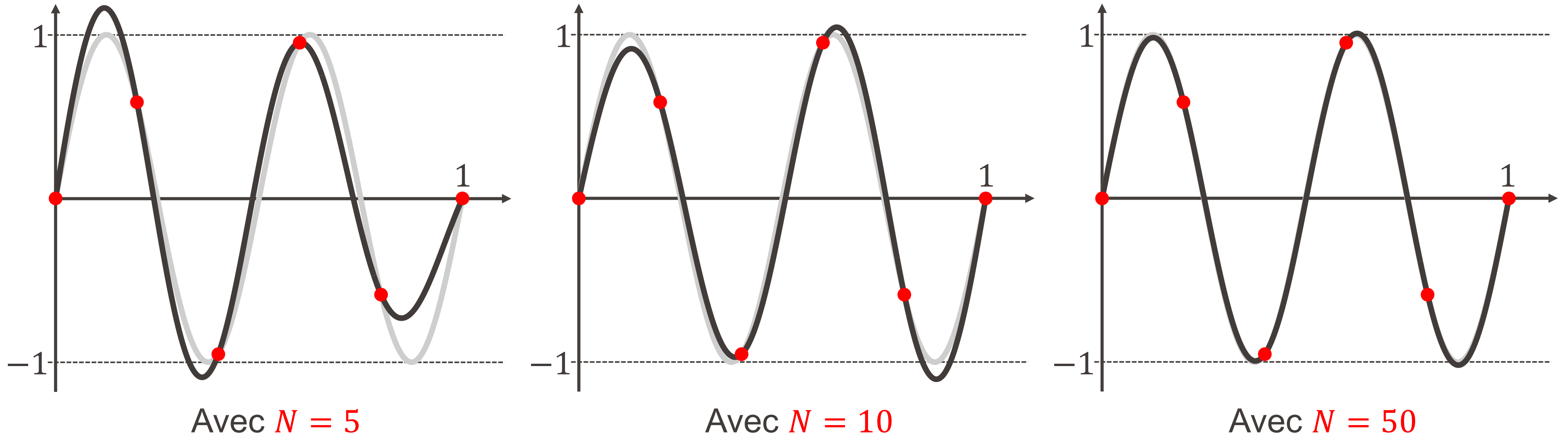
$$X_I(t) \approx \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 2 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :

Avec  $N = 50$



# Illustration du théorème en pratique



**Si  $f_e > 2 f$ , la reconstruction est bonne pour grand  $N$ .**

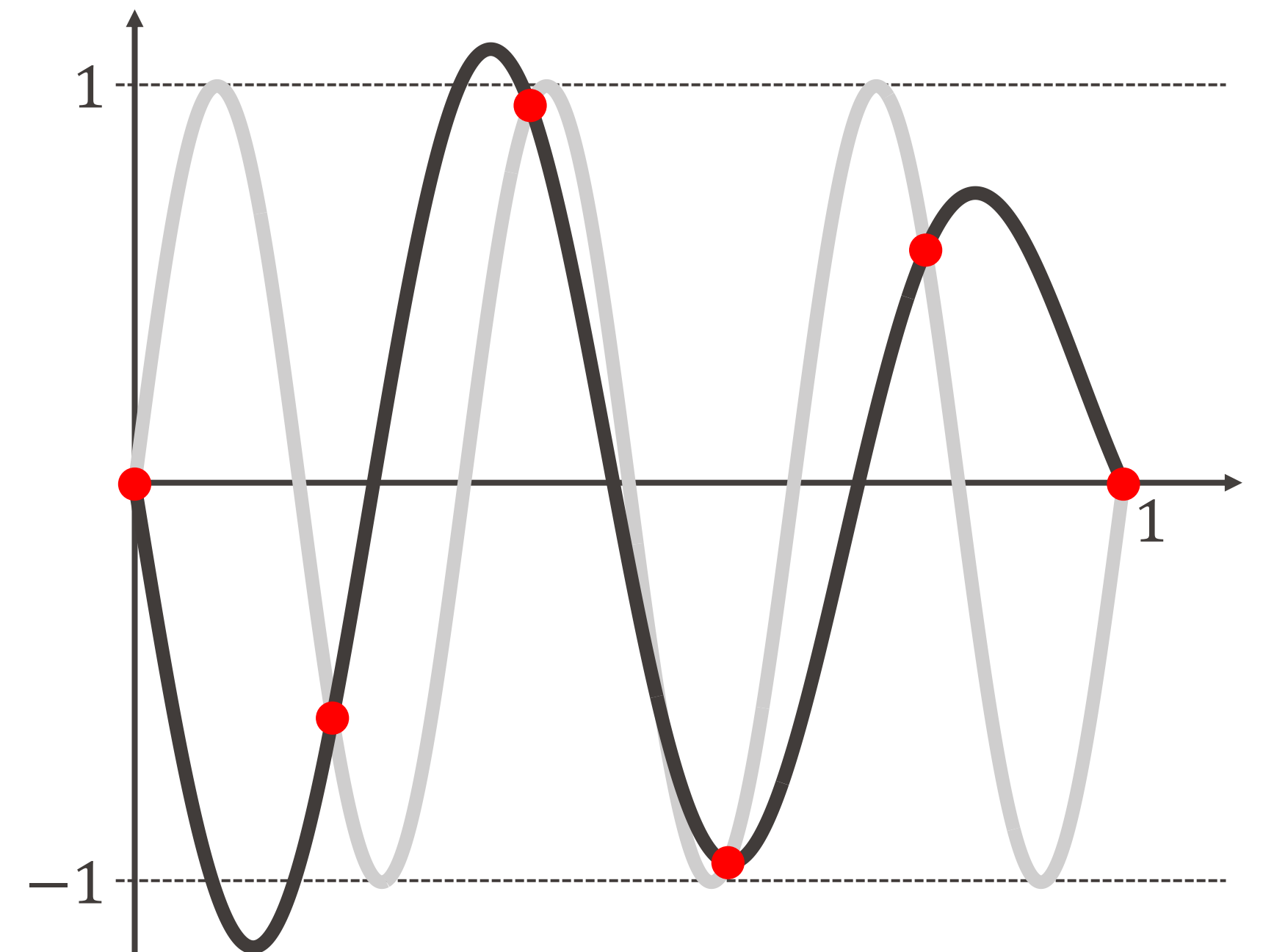


# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \approx \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 3 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :

Avec  $N = 5$



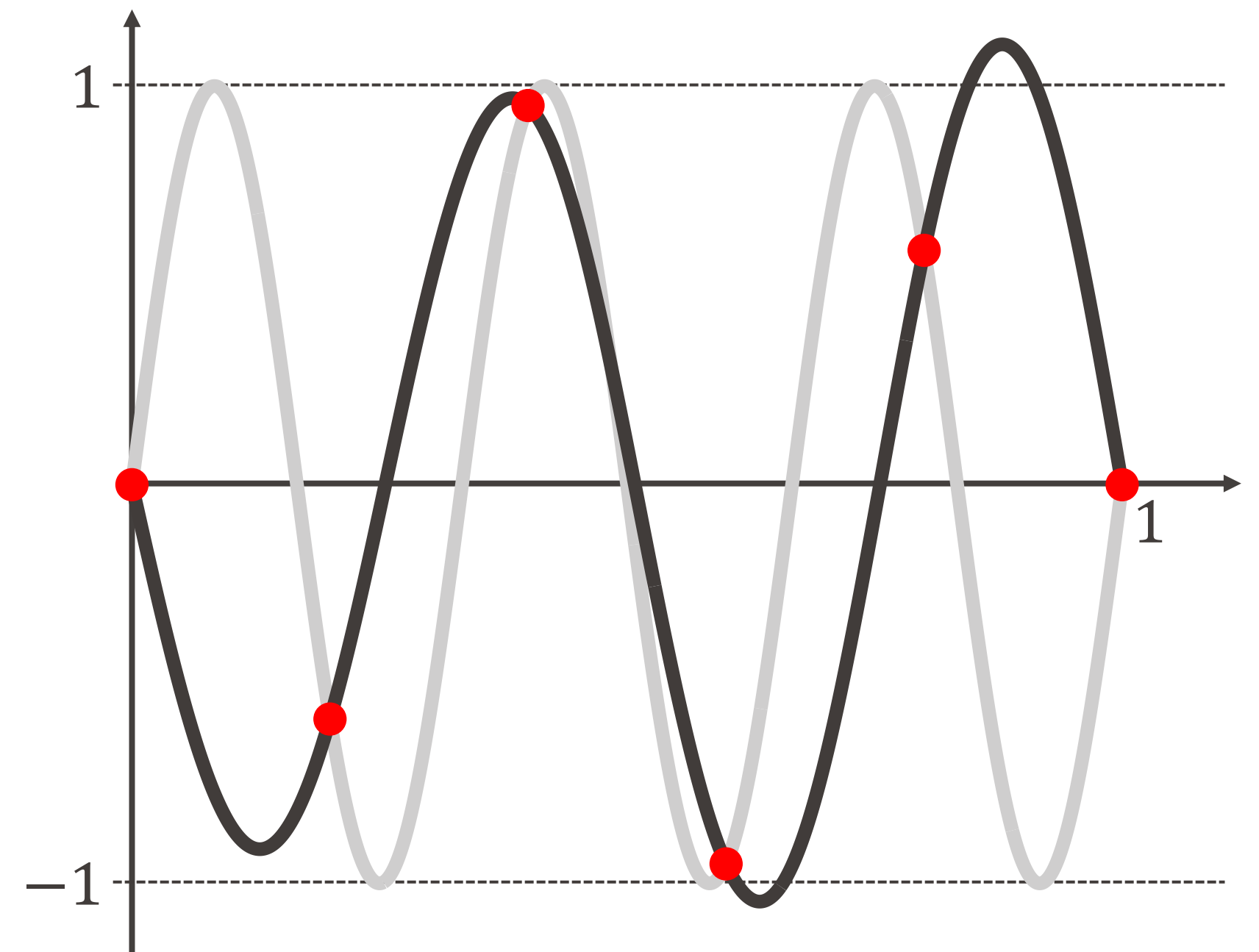


# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \approx \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 3 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :

Avec  $N = 10$

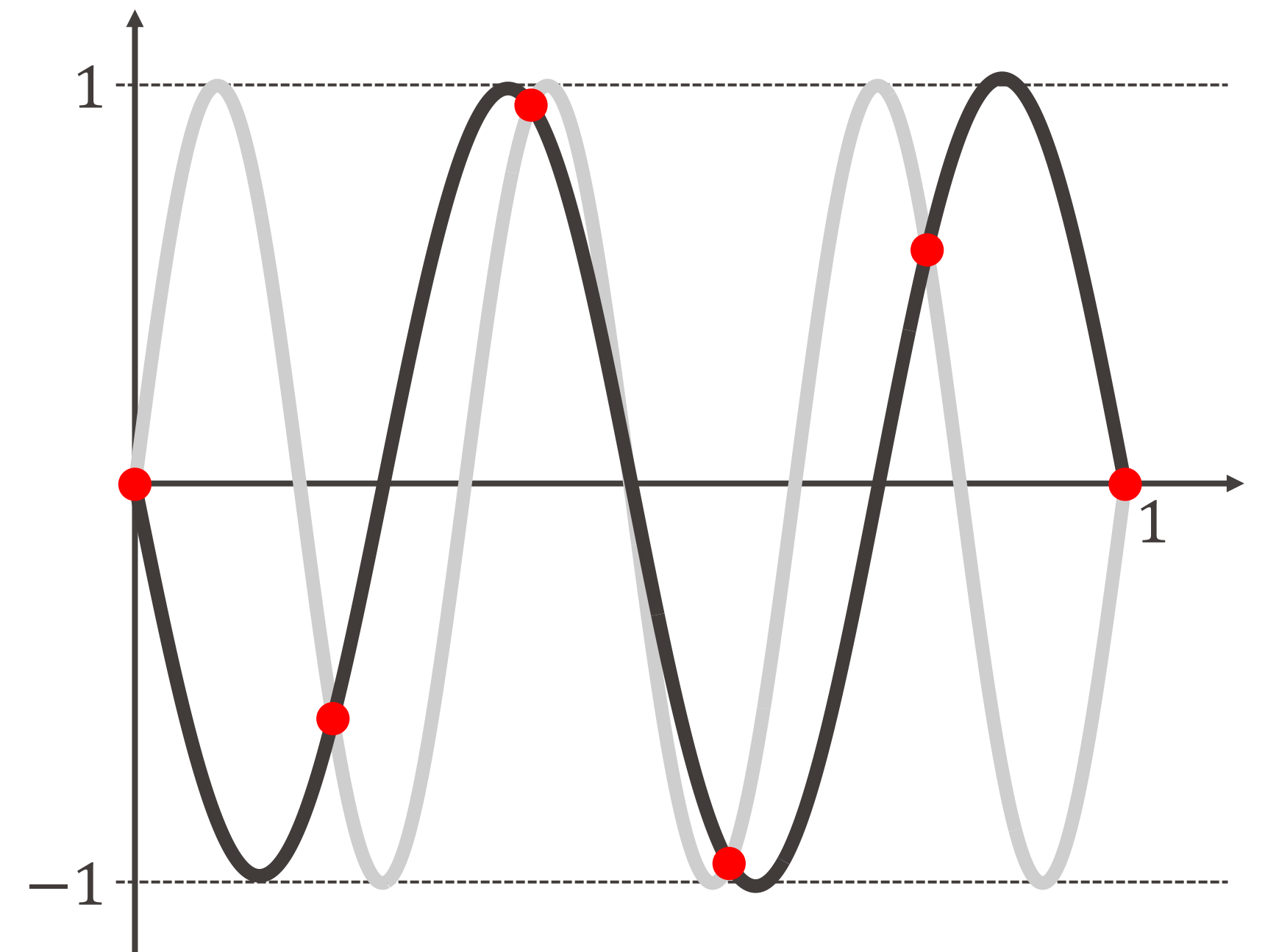


# Illustration du théorème en pratique

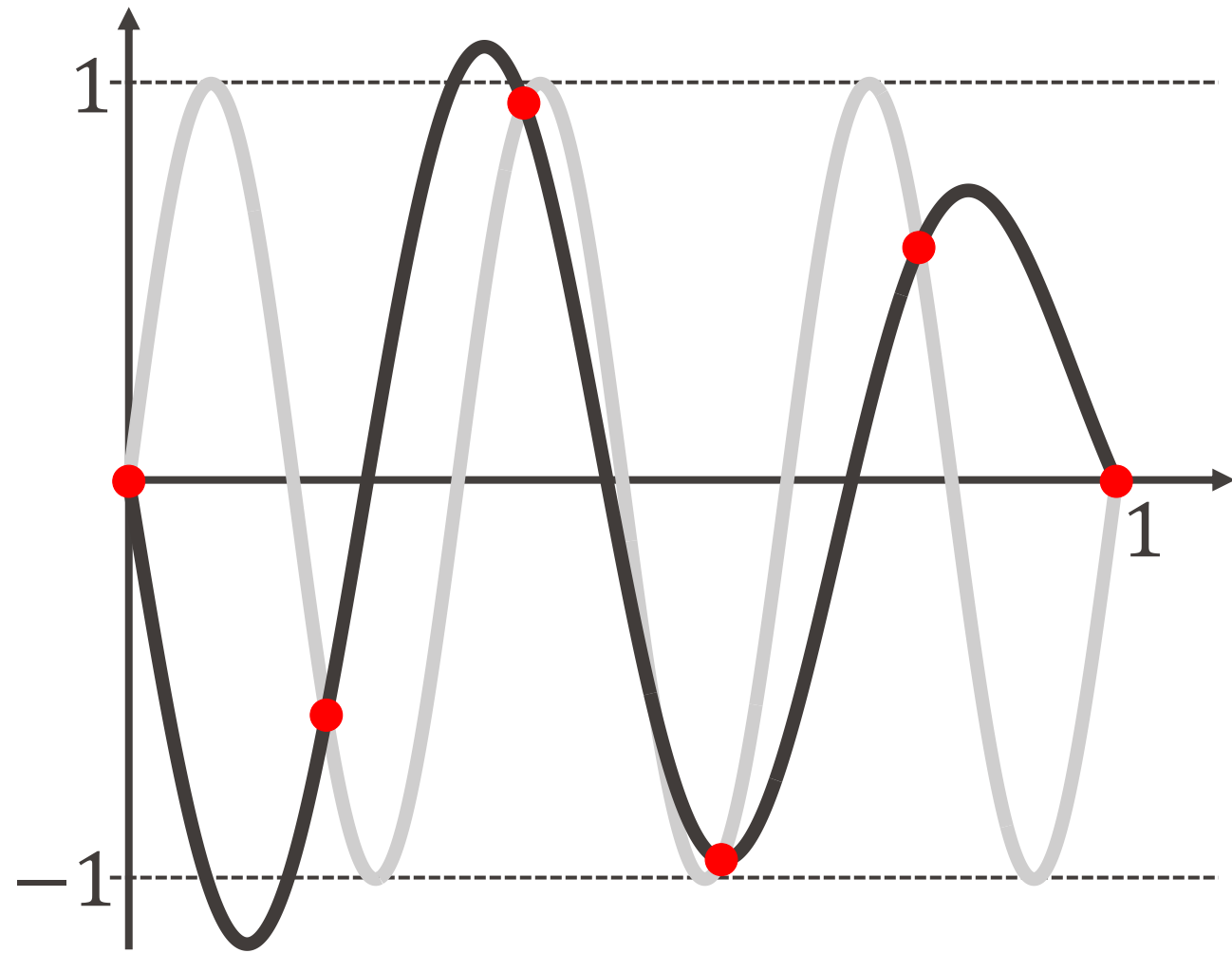
$$X_I(t) \approx \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 3 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :

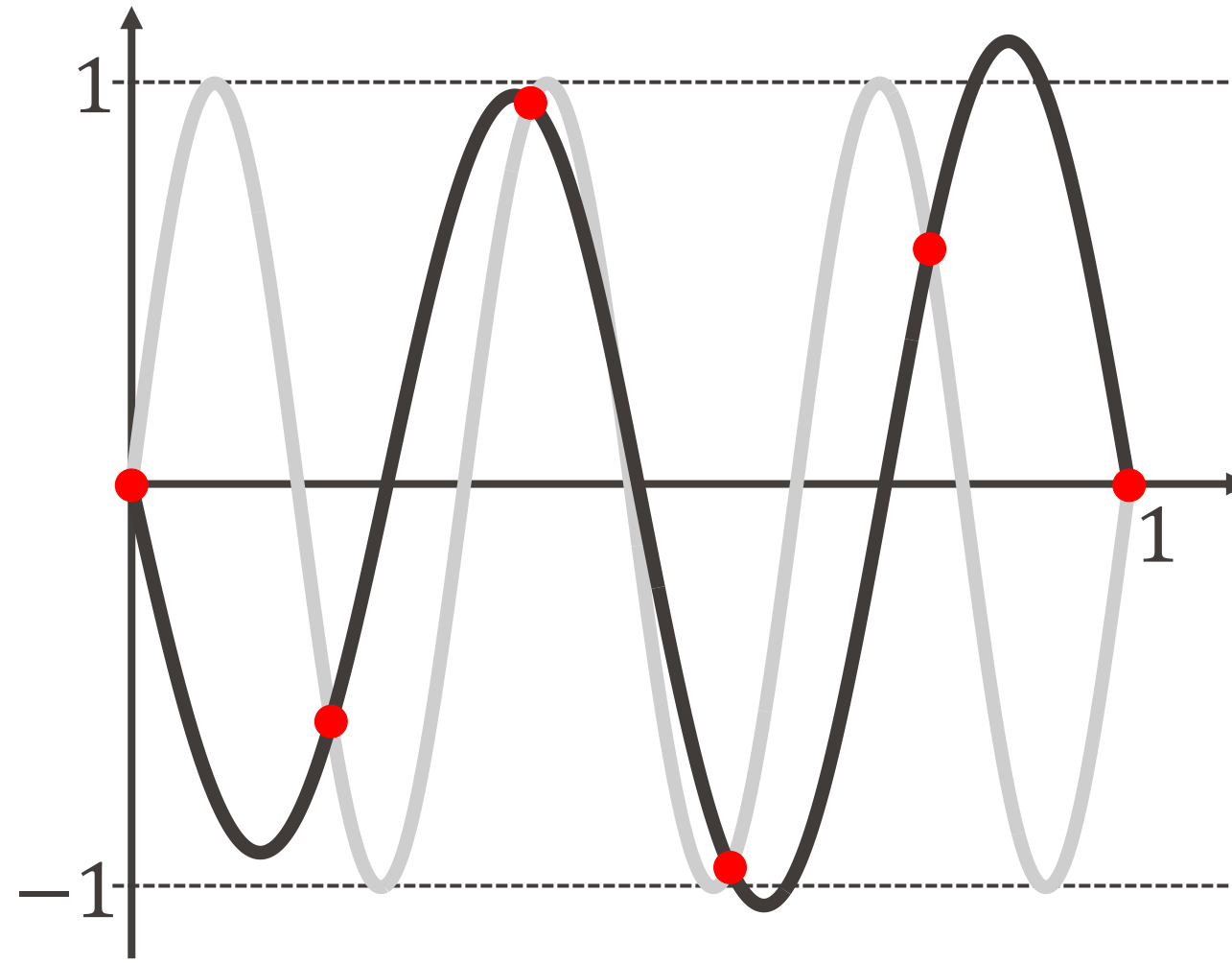
Avec  $N = 50$



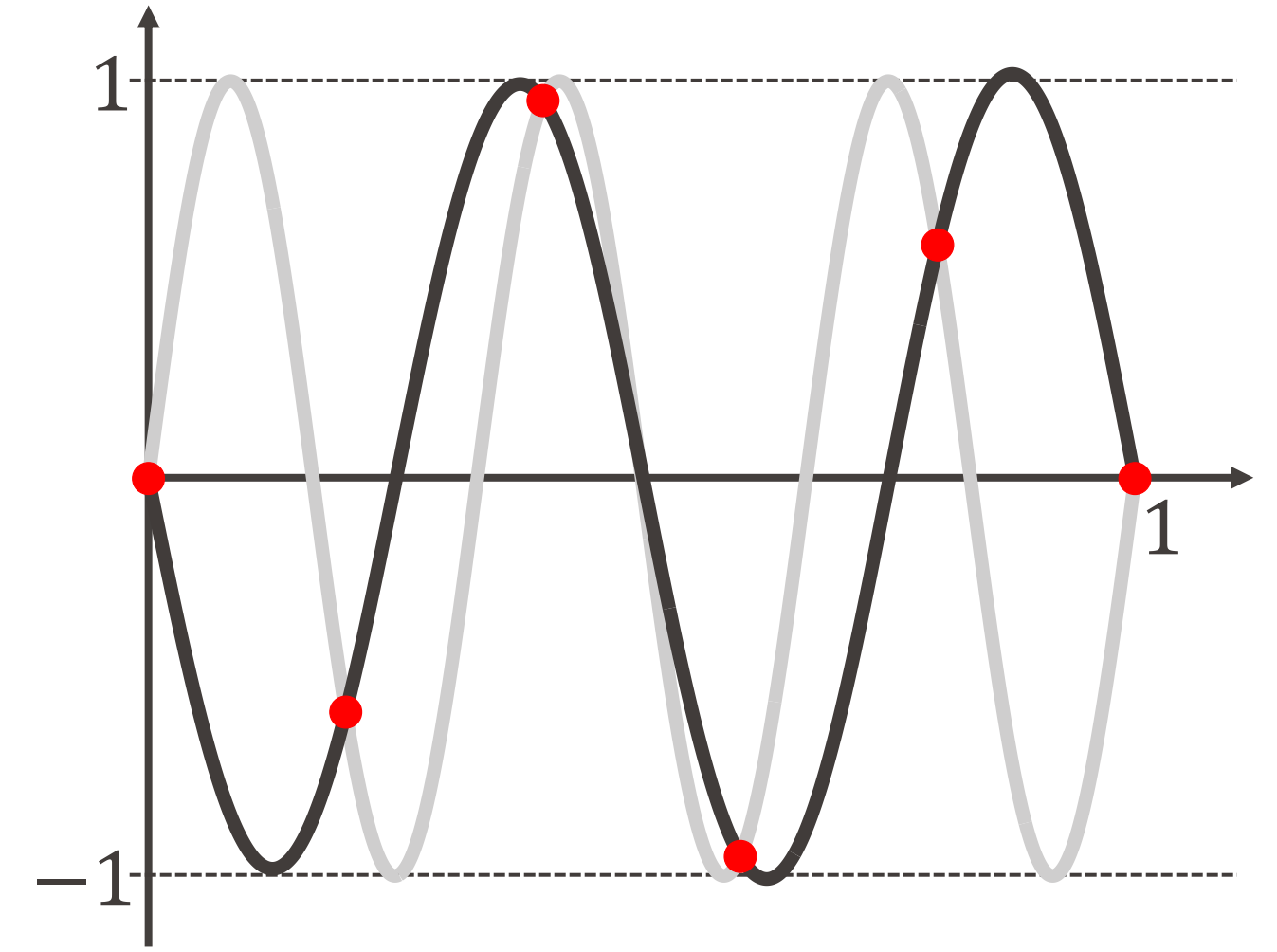
# Illustration du théorème en pratique



Avec  $N = 5$



Avec  $N = 10$



Avec  $N = 50$

**Ici, par contre,  $f_e < 2f$  : on a un problème...**

Et si  $f_e = 2f$  ?

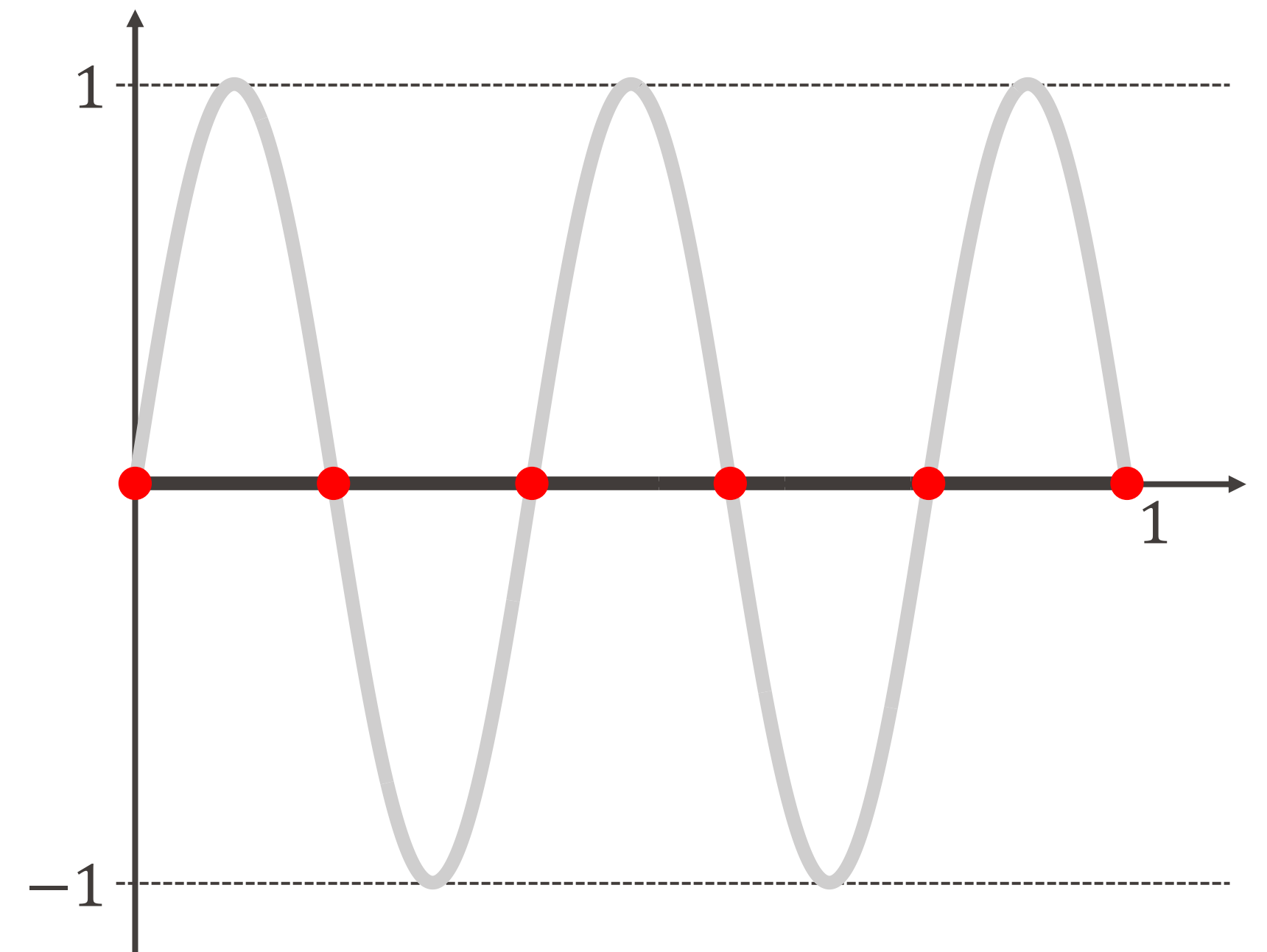
# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 2.5 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :

**Fonction nulle**,  $\forall N \in \mathbb{N}$  !

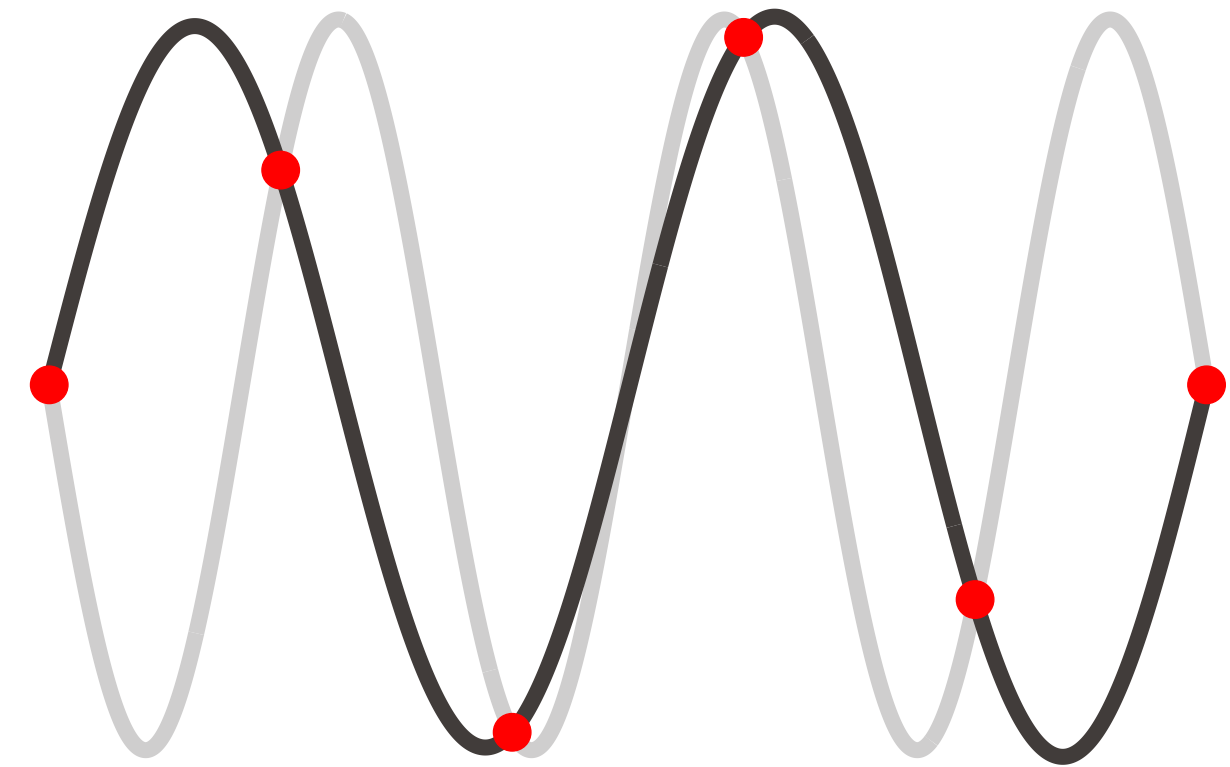
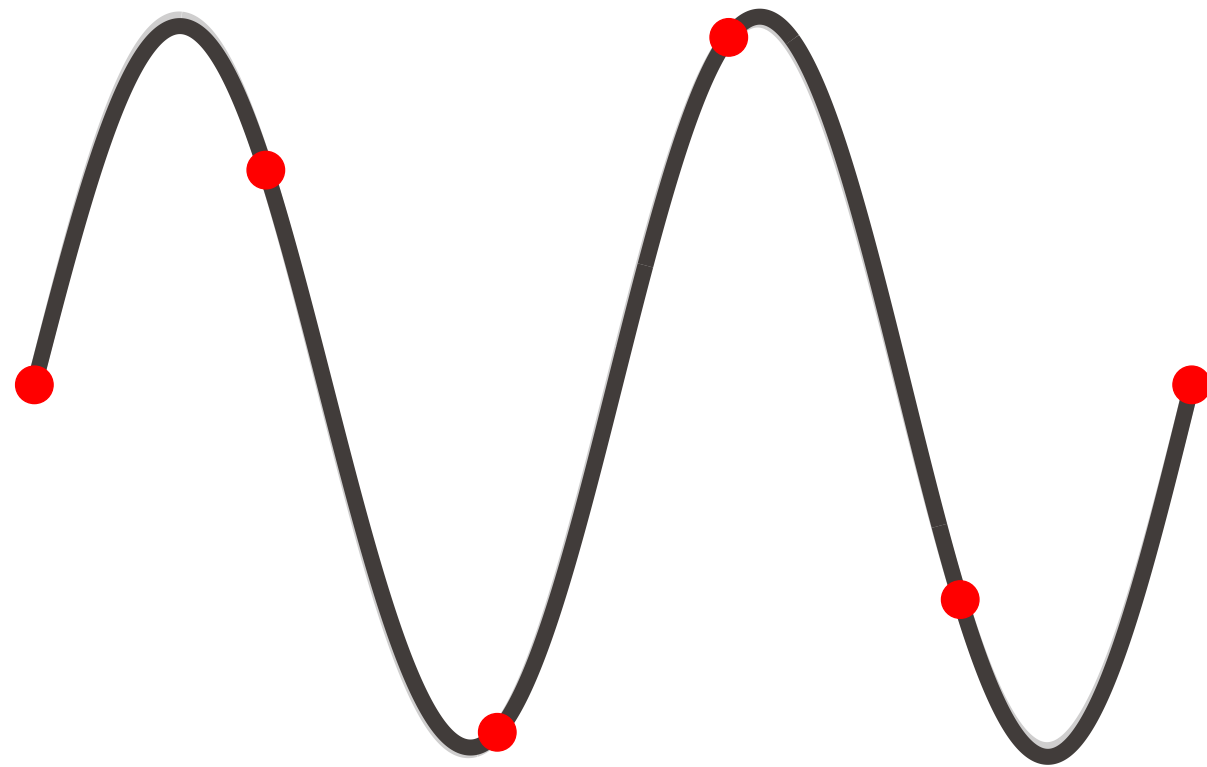
**Ici aussi, on a un problème...**



# Essayons de mieux comprendre cette illustration

**Rappel** : la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 5 \text{ Hz}$ .

- Quand  $f = 2 \text{ Hz}$ , la reconstruction est bonne.
- Quand  $f = 3 \text{ Hz}$ , la reconstruction est mauvaise.



- Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !
- La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite, mais pas le signal d'origine (en transparence)

# Illustration : conclusion

**Rappel** : la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 5 \text{ Hz}$ .

- A partir des seules valeurs échantillonnées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de  $f = 2 \text{ Hz}$  ou de  $f = 3 \text{ Hz}$ .
- Dans une telle situation, notre formule d'interpolation choisit la fréquence la plus basse, i.e.,  $f = 2 \text{ Hz}$ .
- Donc, si on sait dès le départ que la fréquence  $f$  de la sinusoïde d'origine est plus petite que  $\frac{f_e}{2} = 2.5 \text{ Hz}$ , alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- Si par contre la fréquence  $f$  est plus grande que  $\frac{f_e}{2} = 2.5 \text{ Hz}$ , alors la formule d'interpolation choisit la mauvaise fréquence :  $\tilde{f} = f_e - f$ . C'est l'effet stroboscopique que nous avons vu dans une vidéo précédente.

$$f_e > 2f$$

$$f_e > 2f_{max}$$

# Pourquoi $f_{max}$ dans le théorème ?

- Dans l'illustration précédente, on avait affaire à un signal  $X(t)$  avec une seule fréquence  $f$ .
- On a vu dans ce cas que  $f_e > 2f$  est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.

Et si maintenant le signal  $X(t)$  contient deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  ?

- Dans ce cas, il suffit que  $f_e > 2f_1$  et  $f_e > 2f_2$  pour que le signal soit bien reconstruit, i.e., que  $f_e > 2 \max\{f_1, f_2\}$ .
- En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc à la condition

$$f_e > 2f_{max}.$$



# Énoncé du théorème d'échantillonnage

Soient :

- $(X(t), t \in \mathbb{R})$  un signal dont la bande passante (= la plus grande fréquence) vaut  $f_{max}$
- $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$  le même signal échantillonné avec une période  $T_e$  (et soit  $f_e$  la fréquence correspondante :  $f_e = 1/T_e$ )
- On pose encore  $X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$  pour  $t \in \mathbb{R}$

Alors :

*Condition suffisante*

- Si  $f_e > 2f_{max}$ , alors  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

- Si  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , alors  $f_e \geq 2f_{max}$

*condition nécessaire*

# Un lemme utile pour la démonstration

**Lemme :** La bande passante du signal  $X_I(t)$  est inférieure ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ .

**Démonstration du lemme :** Remarquez tout d'abord que

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi t \cdot f) \cdot df$$

i.e., le signal  $\text{sinc}(t)$  est une somme (infinie) de sinusoides de fréquences  $f$  allant de 0 à  $\frac{1}{2}$ . Sa bande passante vaut donc  $\frac{1}{2}$ .

La bande passante signal  $\text{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right) = \text{sinc}(f_e t - m)$  vaut donc  $\frac{f_e}{2}$ .

Et la bande passante du signal  $X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$  est donc inférieure ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ . QED

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_c) \cdot \text{sinc}(f_c t - m)$$

Lemme : B.P. ( $X_I$ )  $\leq \frac{f_c}{2}$

1. sinc(t) =  $\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 2 \cdot \int_0^{1/2} \underbrace{\cos(2\pi f t)}_{\text{primitive} = \frac{\sin(2\pi f t)}{2\pi f}} \cdot df$

= somme de sinusoides!

avec des fréquences  $f \in [0, 1/2]$

donc B.P. (sinc) =  $\frac{1}{2}$

$$2. \text{B.P.}(\text{sinc}(t)) = \frac{1}{2}$$

$$\text{B.P.}(\text{sinc}(f_c \cdot t - m)) = \frac{f_c}{2}$$

$$3. \text{B.P.}(x_I(t)) = \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{Z}} x(mT_c) \cdot \text{sinc}(f_c t - m)}_{\text{B.P.} = \frac{f_c}{2}}$$

$$\underline{\underline{\text{B.P.}(x_I(t)) \leq \frac{f_c}{2}}}$$

#

# Idée de la démonstration du théorème

Démontrons d'abord la **seconde implication** (plus facile) :

$$\text{Si } X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{alors } f_e \geq 2f_{max}$$

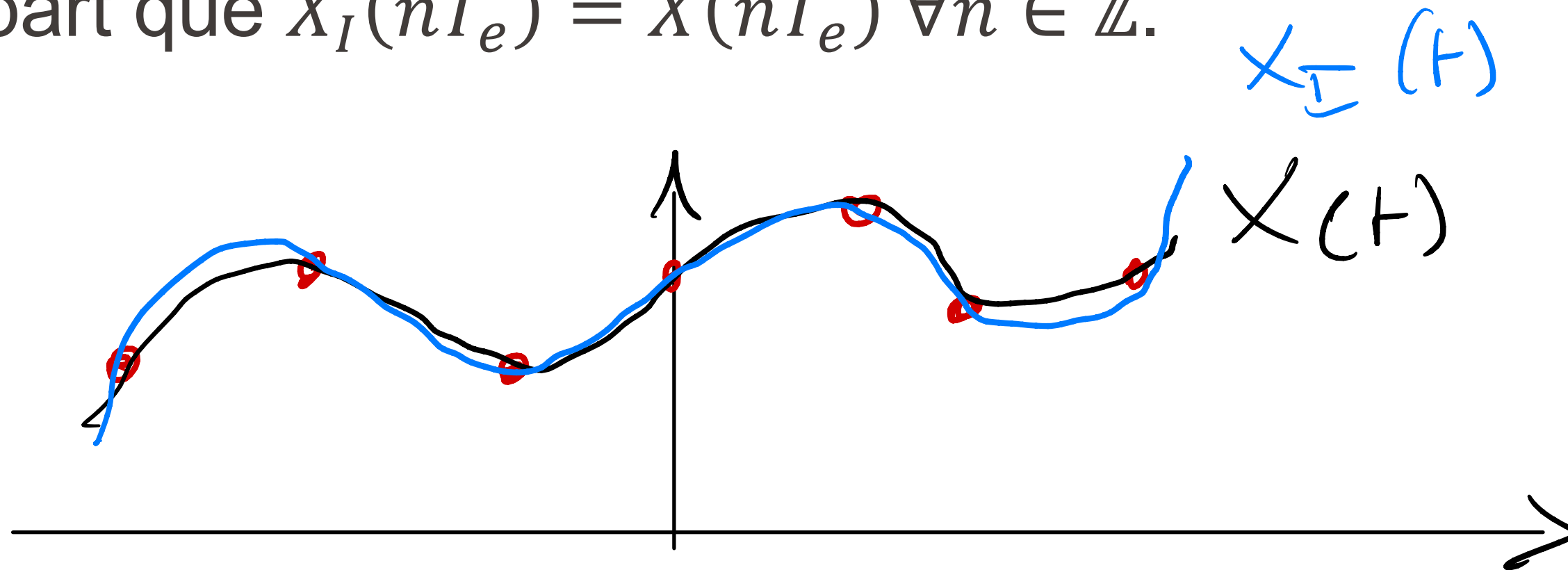
- Si  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , alors ils ont même bande passante (forcément : ce sont les mêmes signaux).
- Or d'après le lemme, la bande passante du signal  $X_I(t)$  est inférieure ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ .
- La bande passante  $f_{max}$  du signal  $X(t)$  est donc également inférieure ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ . QED

# Idée de la démonstration du théorème

Passons maintenant à la **première implication** :

Si  $f_e > 2f_{max}$ , alors  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

- L'hypothèse et le lemme impliquent que les signaux  $X(t)$  et  $X_I(t)$  ont tous deux une bande passante plus petite (ou égale) à  $f_e/2$ .
- On a vu d'autre part que  $X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .



# Idée de la démonstration du théorème

Passons maintenant à la **première implication** :

$$\text{Si } f_e > 2f_{max}, \text{ alors } X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- L'hypothèse et le lemme impliquent que les signaux  $X(t)$  et  $X_I(t)$  ont tous deux une bande passante plus petite (ou égale) à  $f_e/2$ .

- On a vu d'autre part que  $X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .

- On peut montrer le résultat suivant :

Deux signaux de bande passante plus petite (ou égale) à  $\frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e}$   
et qui coïncident aux points  $nT_e, n \in \mathbb{Z}$ , coïncident en fait partout !

- En conclusion, sous l'hypothèse effectuée, on a bien  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .  
«QED»



# Information, Calcul et Communication

**Filtrer avant  
d'échantillonner**

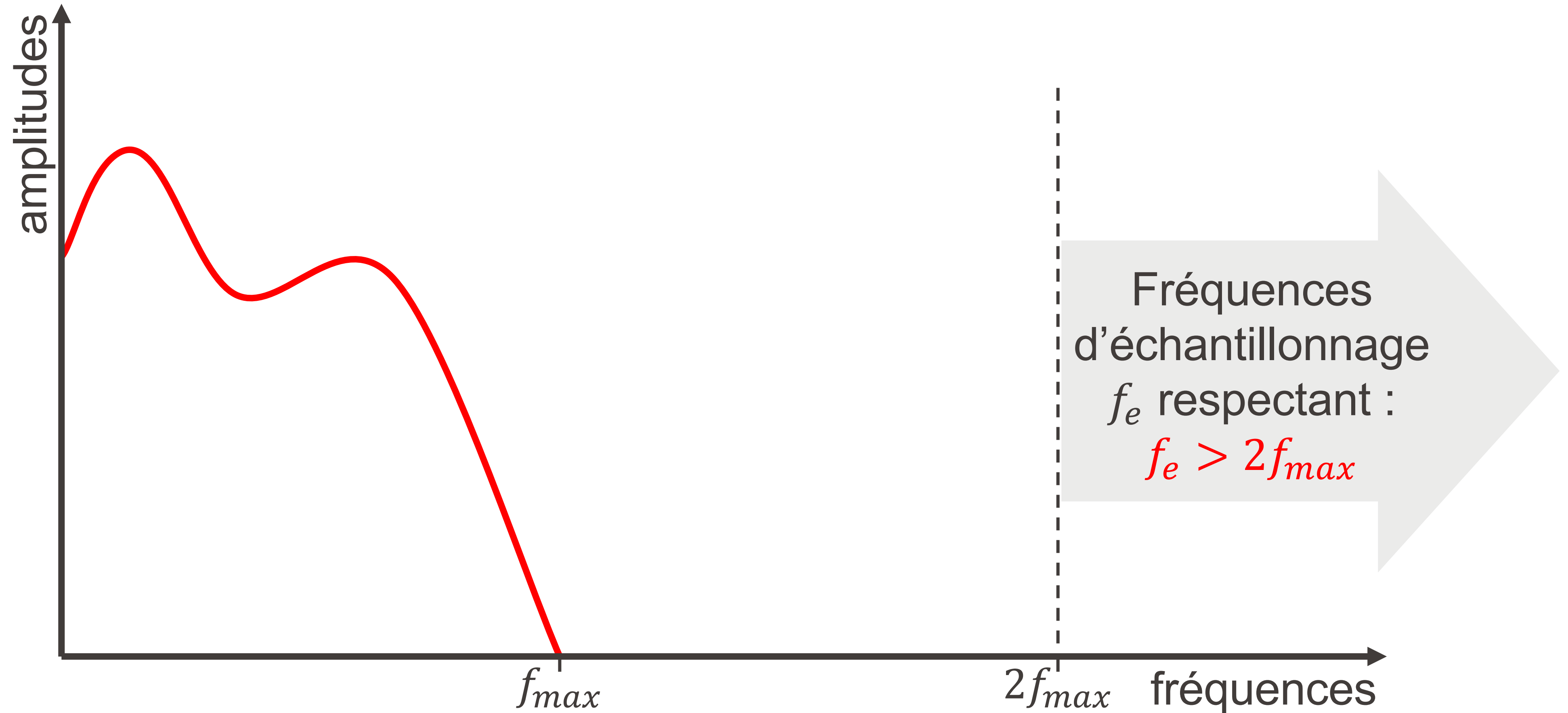
Olivier Lévêque



# Sous-échantillonnage d'un signal

- Lorsqu'on échantillonne un signal à une fréquence  $f_e < 2f_{max}$ , apparaît l'effet stroboscopique dont nous avons parlé précédemment.
- On dit alors que le signal est **sous-échantillonné**.
- En général, on essaie à tout prix d'éviter cet effet stroboscopique !
- Une solution simple :  
    **augmenter la fréquence d'échantillonnage jusqu'à  
    satisfaire la condition  $f_e > 2f_{max}$ .**

# 1<sup>ère</sup> Solution : décomposition spectrale



# 1<sup>ère</sup> Solution : limitations

- Ceci dit, cette solution d'augmenter  $f_e$  peut s'avérer très coûteuse, voire carrément impossible à réaliser en pratique, suivant l'appareillage de mesure dont on dispose.
- De plus, certains signaux contiennent un nombre infini de fréquences (comme la fonction *sinc*), et certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique, des fréquences très élevées).
- Pour ces signaux,  $f_{max} = +\infty$  : de tels signaux sont donc **toujours sous-échantillonnés**, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ .

Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas ?

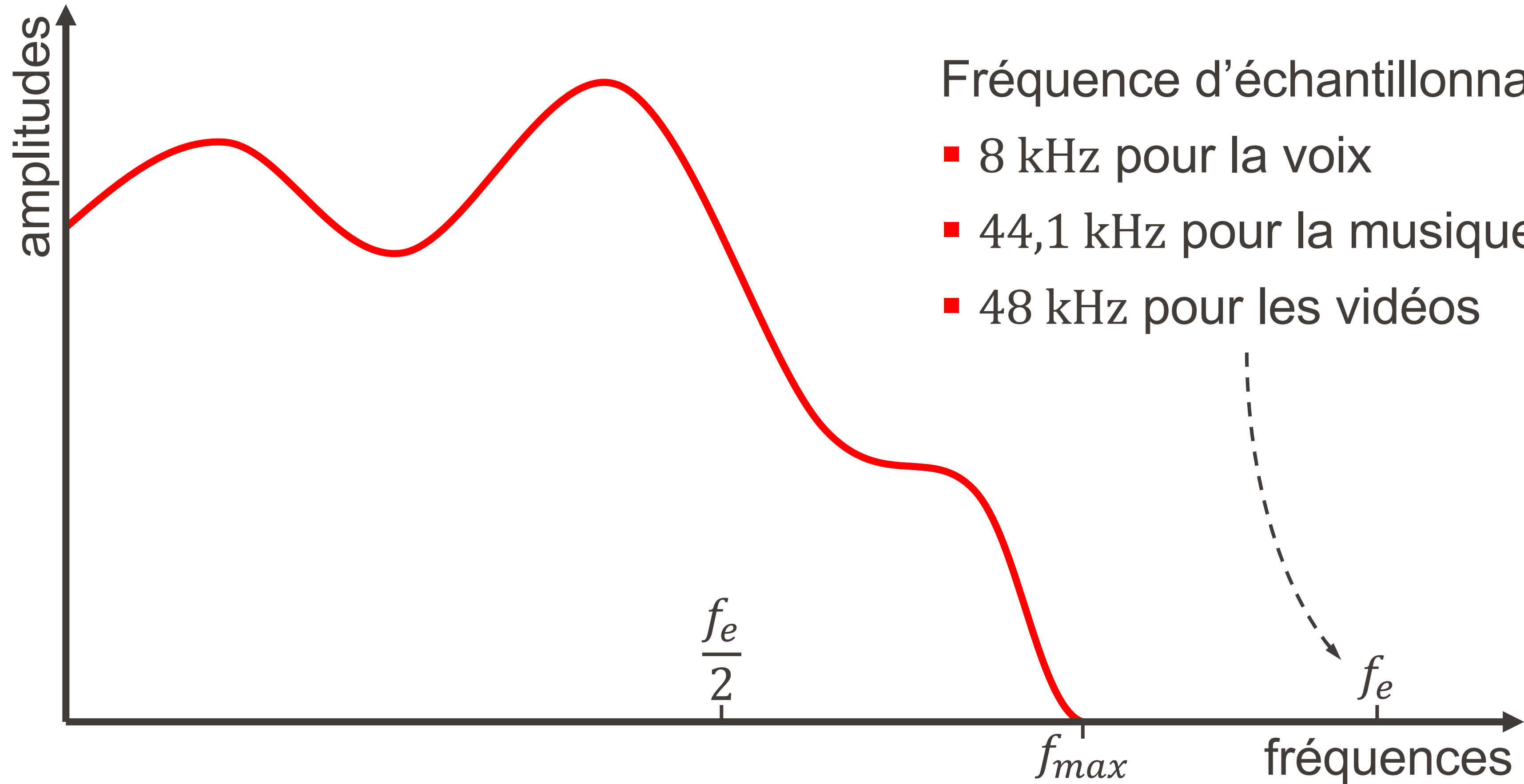
# Effet stroboscopique : une autre solution

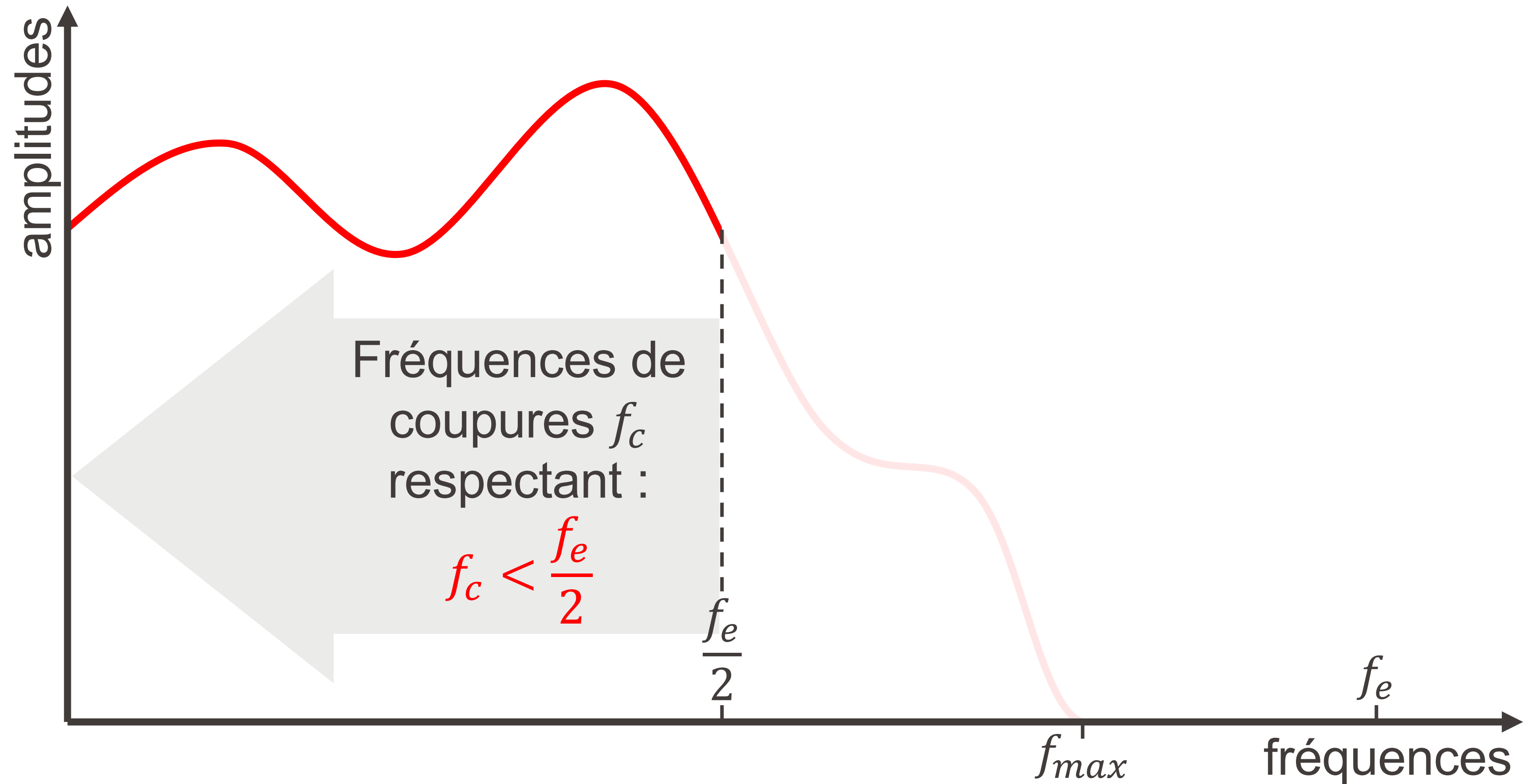
Une solution qui minimise les dégâts consiste à :

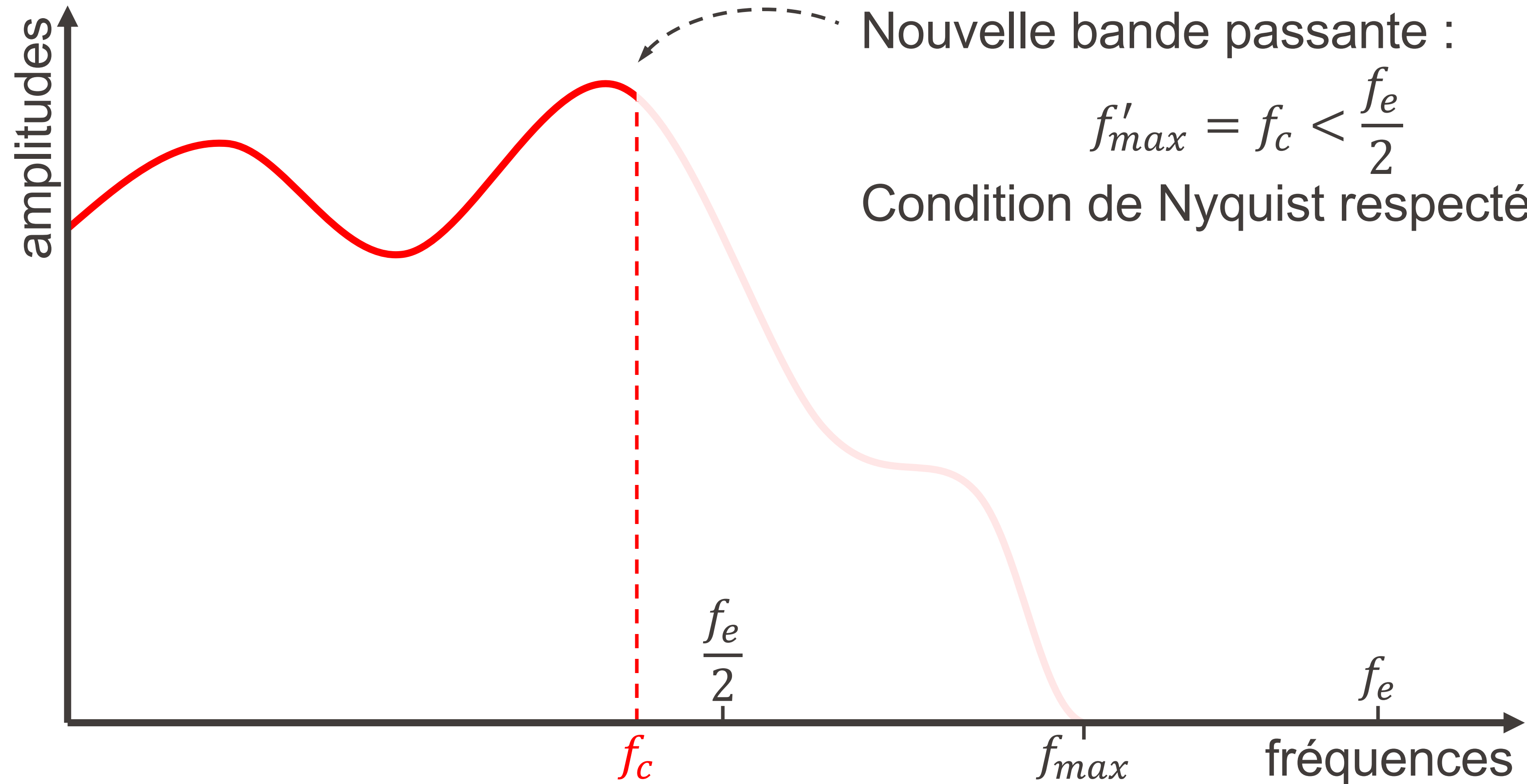
**filtrer le signal **avant** de l'échantillonner !**

- On filtre le signal avec un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure  $f_c$  est juste un peu plus petite que  $\frac{f_e}{2}$ .
- Puis on échantillonne le signal filtré à la fréquence  $f_e$ .
- Et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation.

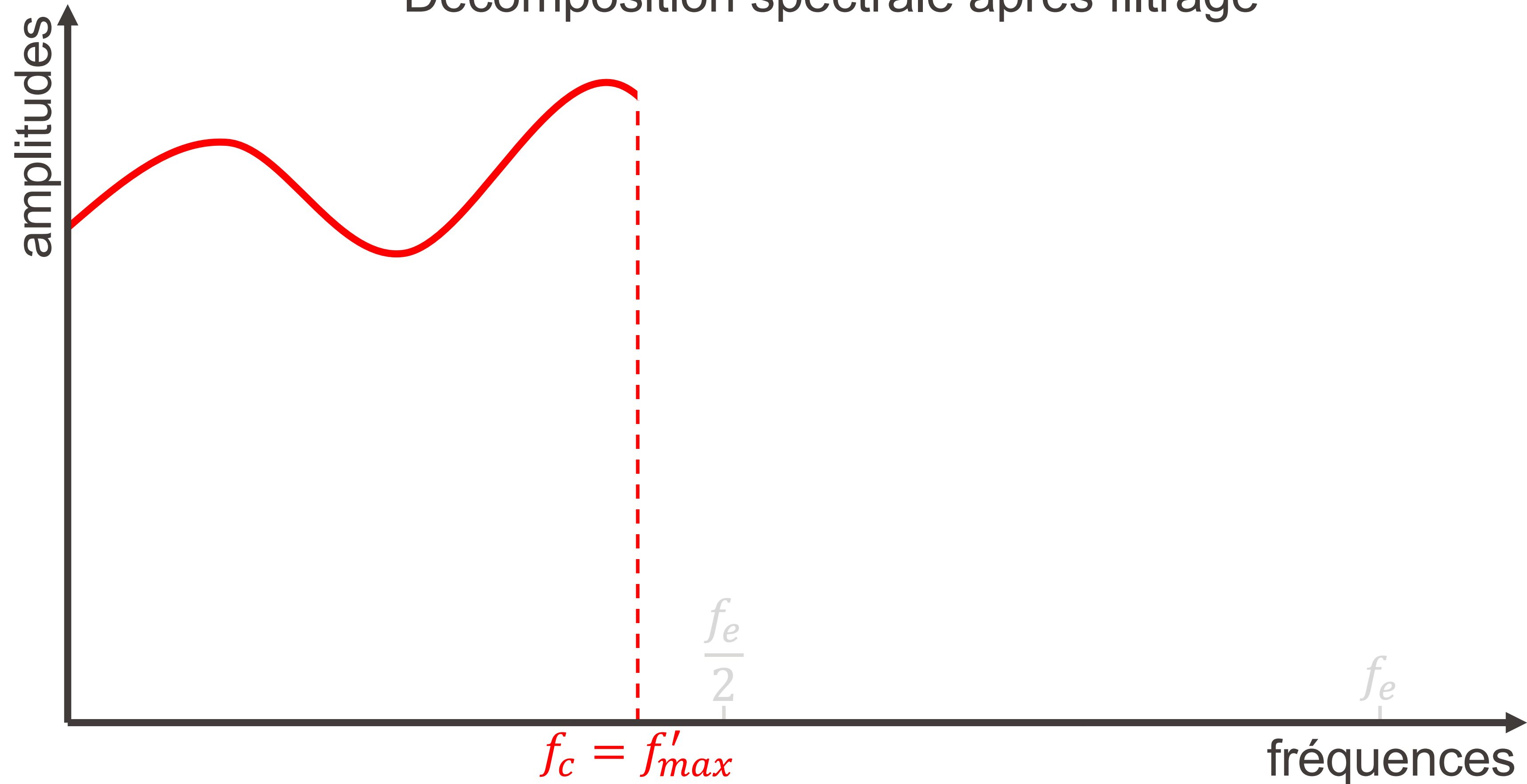
On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite; en particulier, on a pas d'effet stroboscopique.







Décomposition spectrale après filtrage





# Exemple sonore

Sur un support numérique, le son est échantillonné à une fréquence  $f_e = 44.1$  kHz, car les fréquences au dessus de 22 kHz ne sont (en général) pas perçues par l'oreille humaine. Celles-ci sont donc filtrées avant l'échantillonnage, ce qui garantit que la condition de Nyquist soit respectée.

Vous allez maintenant entendre trois extraits d'un morceau de musique Jazz :  
("Our love is here to stay" de Georges Gerschwin, joué par Roland Kirk)

- Un premier extrait, où le son a été filtré à 22 kHz avant d'être échantillonné à 44.1 kHz.
- Un deuxième extrait, où le son a été filtré à 22 kHz, mais a ensuite été échantillonné à 8.82 kHz seulement.
- Et finalement, un troisième extrait, où le son a d'abord été filtré à 4.4 kHz, avant d'être échantillonné à 8.82 kHz.

