Série 11

Exercice 1. Indique pour chacun des quatre quadrants

$$\text{I) } 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{II) } \tfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \qquad \text{III) } \pi < \alpha < \tfrac{3\pi}{2}, \qquad \text{et} \qquad \text{IV) } \tfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,$$

le signe de $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ et $\cot(\alpha)$.

Exercice 2. Propriétés élementaires des fonctions trigonométriques. Démontre à l'aide d'un raisonnement sur le cercle trigonométrique que les fonctions trigonométriques vérifient les relations suivantes :

a) Pour tout angle α on a $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

b) Pour tout angle $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

c) Pour tout angle $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cot(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

d) Pour tout angle $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $1 + \tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

e) Pour tout angle $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $1 + \cot^2(\alpha) = \dfrac{1}{\sin^2(\alpha)}$.

Exercice 3. Relations trigonométriques entre certains angles. À l'aide d'un raisonnement sur le cercle trigonométrique, calcule respectivement en fonction de $\cos(x), \sin(x), \tan(x)$ et $\cot(x)$ les valeurs de :

a) $\cos(-x)$, $\sin(-x)$, $\tan(-x)$ et $\cot(-x)$;

b) $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$, $\tan(\pi - x)$ et $\cot(\pi - x)$;

c) $\cos(\pi + x)$, $\sin(\pi + x)$, $\tan(\pi + x)$ et $\cot(\pi + x)$;

d) $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\cot(\frac{\pi}{2} - x)$;

e) $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$, $\tan(\frac{\pi}{2} + x)$ et $\cot(\frac{\pi}{2} + x)$.

Exercice 4. Sans calculer l'angle, trouve toutes les valeurs possibles de

a) $\cos(x)$ sachant que $\sin(x) = \frac{4}{5}$;

b) $\sin(x)$ sachant que $\tan(x) = \frac{12}{5}$;

c) $\tan(x)$ sachant que $\cos(x) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Exercice 5. Sans utiliser la machine, calcule les valeurs exactes de

$$\sin(\tfrac{3\pi}{4}), \qquad \cos(\tfrac{7\pi}{4}), \qquad \tan(\tfrac{-\pi}{4}), \qquad \sin(\tfrac{5\pi}{6}), \qquad \cos(\tfrac{-11\pi}{3}), \qquad \text{et} \qquad \tan(\tfrac{7\pi}{6}).$$

Exercice 6. Démontre que

$$\frac{1 + 2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)} = (1 + \tan(x))^2.$$

Est-ce vrai pour toutes les valeurs réelles de x ?

Exercice 7. Période d'une fonction I. Rappelons que la *partie entière* d'un nombre réel x est le plus grand nombre entier $\lfloor x \rfloor$ qui est inférieur ou égal à x. On considère la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

b) Quelle est l'image de cette fonction ? En d'autres termes, décris l'ensemble

$$\{y \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } x \text{ avec } f(x) = y\}.$$

c) Cette fonction est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

d) Esquisse le graphe de cette fonction.

Exercice 8. Période d'une fonction II.

a) Démontre que si une fonction g à valeurs réelles est périodique, alors le carré de cette fonction aussi.

b) Quelle est la période de la fonction $\sin^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

c) Quelle est la période de la fonction $\cos^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

d) Quelle est la période de la fonction $\sin^2 + \cos^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Exercice 9. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

a) $\cos(2x) = 2\cos(x)$;

b) il existe $x > 0$ tel que $\tan(x) = -1000$;

c) si $\sin(x) = 0$, alors $x = 0$;

d) si f est une fonction périodique alors $g \circ f$ est périodique pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

e) si f est une fonction périodique alors $f \circ g$ est périodique pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 10. Esquisse le graphe de la fonction $\sin(2x)$ et de la fonction $\cos(x/2) + 1$.