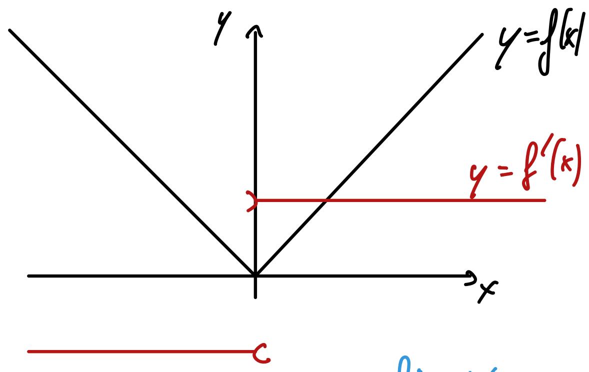
Contre-exemple à la réciproque : valeur absolue $f(x) = |x|$, en $x_0 = 0$

- f est continue en $x_0 = 0$, $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$
- mais f n'est pas dérivable en 0 :

- $\lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$

donc $\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ n'existe pas



fin 11/11

6.3 Formules de dérivées à connaître

$f(x)$	$f'(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$c \in \mathbb{R}$	0	
x	1	
$x^p, p \in \mathbb{R}^*$	$p x^{p-1}$	$x \neq 0$ si $p < 1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\log(x)$	$1/x$	$x > 0$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Exemple : • $f(x) = x^{1/3}$, $x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot x^{-2/3-1} = \frac{-2}{9} x^{-5/3}$

6.4 Opérations sur les dérivées

Prop : Soient $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a,b[$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- $(\alpha f + \beta g)' = \alpha \cdot f' + \beta g'$ sur $]a,b[$ (linéarité de la dérivée).
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ sur $]a,b[$ (règle du produit)
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f \cdot g'}{g^2}$ sur $\{x \in]a,b[\,;\, g(x) \neq 0\}$

Exemple (dérivée d'un polynôme) : Soit $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 0, \dots, n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

Preuve de la règle du produit : soit $x \in]a,b[$

- $$\frac{(f\cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(f(x+h) g(x+h) - f(x) g(x+h) + f(x) g(x+h) - f(x) \cdot g(x) \right)$$

$$= g(x+h) \cdot \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + f(x) \cdot \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

continuité de g

$$\xrightarrow[h \to 0]{} g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

6.5 Dérivée de la composition (chain rule).

Thm. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

Exemple : Soit $h(x) = f(-x)$ et f dérivable
Alors $h = f \circ g$ avec $g(x) = -x$
Donc $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -f'(-x)$

Remarque (compositions multiples)

$$(h\circ g\circ f)' = (h\circ(g\circ f))' = (h'\circ g\circ f)\cdot(g\circ f)' = (h'\circ g\circ f)\cdot(g'\circ f)\cdot f'$$

Exemple : $f(x) = \cos(\log(\sqrt{1+x^2}))$, $x\in\mathbb{R}$

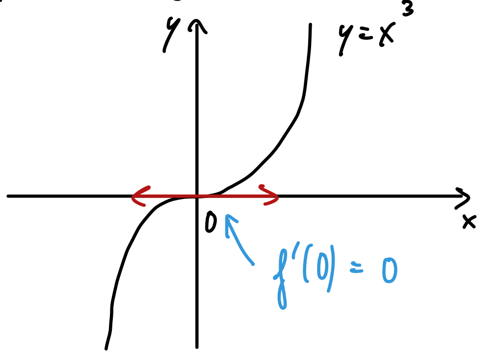
$$f'(x) = -\sin(\log(\sqrt{1+x^2}))\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x$$

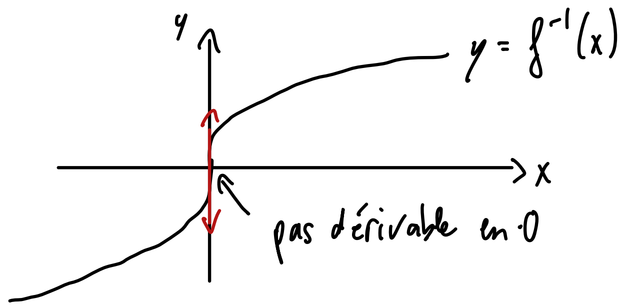
6.6 Dérivée des fonctions réciproques

Thm : La réciproque d'une fonction f injective et dérivable existe et est dérivable sur l'image de tout intervalle I tel que $\forall x\in I$, $f'(x)\neq 0$.

Exemple : $f(x) = x^3$, $D(f)=\mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x\geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{si } x<0 \end{cases}$$





f^{-1} continue sur $\mathbb{R}$

mais $D((f^{-1})') = \mathbb{R}^*$

Calcul de $(f^{-1})'$:

On utilise $(f\circ f^{-1})(y) = y$, $\forall y\in D(f^{-1})$.

$$(f\circ f^{-1})'(y) = \begin{cases} f'(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1})'(y) & \leftarrow \text{dérivée d'une composition} \\ 1 & \leftarrow \text{dérivée de } y\mapsto y \end{cases}$$

On obtient : $\boxed{\forall y\in D((f^{-1})') \text{ on a } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$

Exemple : • $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \log(x)$, $D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) =]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$

$$(\log)'(x) = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x} , \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* .$$

• $f(x) = \sin(x)$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathrm{Im}(f) = [-1,1]$

$f'(x) = \cos(x)$ satisfait $f'(x) \neq 0$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ définie sur $[-1,1]$ (continue sur $[-1,1]$).

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Or pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$

Donc $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pour résumer, $\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ pour $x \in]-1,1[$ $(= f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[))$.

6.7 Dérivabilité sur un intervalle

Def : (dérivabilité sur un intervalle fermé). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}, a<b$.

On dit que :

- f est dérivable à droite en $x_0 \in [a,b[$ si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe $\in \mathbb{R}$

  On note $f'_+(x_0)$ ou bien $f'_d(x_0)$ la valeur de cette limite.

- f est dérivable à gauche en $x_0 \in]a,b]$ si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe $\in \mathbb{R}$

  On note $f'_-(x_0)$ ou bien $f'_g(x_0)$ la valeur de cette limite.

Prop : f est dérivable en $x_0 \in]a,b[\iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite} \\ \text{en } x_0 \text{ et } f'_+(x_0) = f'_-(x_0). \end{cases}$

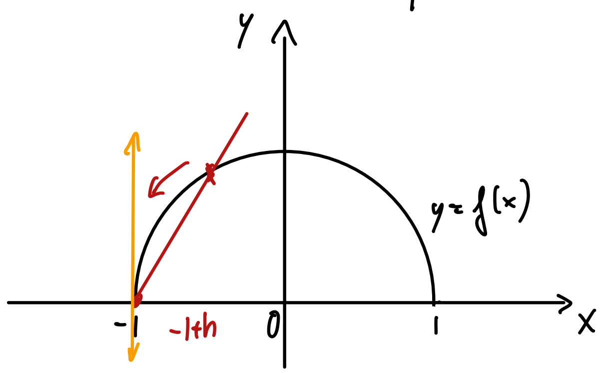
Def : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a,b]$ ssi :

- f est dérivable sur $]a,b[$ et
- f est dérivable à gauche en b et à droite en a.

(On note $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction dérivée étendue par $\begin{cases} f'(a) = f'_d(a) \\ f'(b) = f'_g(b) \end{cases}$.

Contre-exemple : $f : \begin{vmatrix} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{vmatrix}$

Rmq : $f(x)^2 + x^2 = 1, \ \forall x \in [-1,1]$



f est continue sur $[-1,1]$

f est dérivable sur $]-1,1[$ mais pas sur $[-1,1]$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$

En -1 : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = +\infty$

En 1 : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

Def (Fonctions de classe C^k). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide. On définit :

- $C^0(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \ ; \text{ telles que } f \text{ est continue sur } I \}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ C^k(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \ ; \text{ telles que } f \text{ est } k \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } f^{(k)} \text{ est continue sur } I \}$
- $C^\infty(I) := \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(I)$ c'est à dire

$f \in C^\infty(I) \iff (f \in C^k(I), \ \forall k \in \mathbb{N}.)$

Notation : $\bigcap_{k=\ell}^{m} A_k = A_\ell \cap A_{\ell+1} \cap \dots \cap A_m$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $\quad C^\infty(I) \subset C^{k+1}(I) \subset C^k(I) \subset C^0(I)$

Si $f \in C^k(I)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) on dit que f est k fois continûment dérivable sur I.

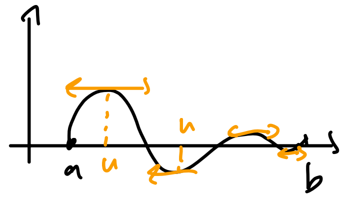
6.8 Application du calcul différentiel.

6.8.1 Théorème de Rolle

Thm : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Si :

1) f est continue sur $[a,b]$.
2) f est dérivable sur $]a,b[$
3) $f(a) = f(b)$ $(= 0)$

Alors $\exists\, u \in]a,b[$ t.q $f'(u) = 0$



Exemple : $f : \begin{cases} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ (cf. ci-dessus)

$\rightsquigarrow$ f satisfait les hypothèses et $\exists\, u \in]-1,1[$ t.q $f'(u) = 0$ (ici $u = 0$).

fin 14/11

Preuve : f est continue sur $[a,b]$ donc elle admet un maximum M et un minimum m.