Partie I : Limites et continuité

Exercice 1.
Est-ce que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}\,, & x > 1 \\ 3\,, & x \leq 1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$?

Solution.

Pour $x \neq 1$, la fonction f est continue puisqu'elle est une composition de fonctions élémentaires qui sont continues sur leur domaine de définition. Il reste donc à vérifier si f est continue en $x = 1$, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. D'une part on a

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3 = f(1).$$

D'autre part, en utilisant que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, on obtient

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x^2+x+1) = 3 = f(1).$$

Ainsi, f est aussi continue en $x = 1$ et donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.
Calculer les limites ci-dessous.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, où $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$.

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(\sqrt{x}-1)}{x-1}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+\alpha)^n - \alpha^n}{x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution.

a) On a

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x+3}{x-2}$$

et donc

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty.$$

b) La fonction $\sin(1/x)$ *est bornée de sorte que :*

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Or

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

D'après le théorème des deux gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

c) On a

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{2x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{3})(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{(1+x-2x)(\sqrt{1+2x}+\sqrt{3})}{(1+2x-3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})} \\ &= \frac{(1-x)(\sqrt{1+2x}+\sqrt{3})}{2(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})} = -\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to 1} \sqrt{1+2x} = \sqrt{3}$*,* $\lim_{x\to 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$*, et* $\lim_{x\to 1} \sqrt{2x} = \sqrt{2}$ *existent dans* $\mathbb{R}$*, de sorte que*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

d) On a

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\sin x}{x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)\sqrt{x},$$

Comme $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$*, on a*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

e) Nous écrivons

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}.$$

Puisque $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ *et* $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$*, nous avons*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)}\right) = 1 \cdot 1.$$

f) On a

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{\tan(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \frac{\tan(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{\tan(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ =& \left(\frac{\tan(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right). \end{aligned}$$

Par le point précédent,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\tan(y)}{y} = 1.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\right) \overset{y=\sqrt{x}-1}{=} \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\tan(y)}{y} = \frac{1}{2}.$$

g) On a montré dans la Série 8 que

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{(x+\alpha)^n - \alpha^n}{x} &= \frac{(x+\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}(x+\alpha)^k\alpha^{n-1-k}}{x} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(x+\alpha)^k\alpha^{n-1-k}. \end{aligned}$$

En utilisant les proprietés algebriques de la limite, on conclut

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(x+\alpha)^k\alpha^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\lim_{x\to 0}(x+\alpha)^k\alpha^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\alpha^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{n-1} = n\alpha^{n-1}. \end{aligned}$$

Exercice 3.
Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|(x+1)}{3x^2+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin(1/x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1}.$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x).$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}.$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}.$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$

Solution.

a) En considérant des x négatifs (puisque $x\to-\infty$), nous avons $|x| = -x$, donc la limite devient

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-x}{3x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}\frac{-1-\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{3}.$$

b) Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et la fonction $\sin$ est continue en 0, nous pouvons directement conclure

$$\lim_{x\to+\infty}\sin(1/x) = \sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right) = \sin(0) = 0.$$

c) Nous pouvons borner $\sin(x)$ par -1 et 1, d'où, par le théorème des deux gendarmes,

$$\underbrace{\frac{-1}{x}}_{\to 0} \le \frac{\sin(x)}{x} \le \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \qquad\Longrightarrow\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

d) On a

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1} = \frac{|x|}{x}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}$$

En considérant des $x<0$, nous avons $|x|=-x$, d'où

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

e) On a

$$\begin{aligned} x(\sqrt{x^2+1}+x) =& x(\sqrt{x^2+1}+x)\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x} \\ =& \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} \end{aligned}$$

Vu qu'on prend la limite quand x tend vers $-\infty$, on peut travailler sous l'hypothèse que $x<0$, c'est-à-dire $|x|=-x$. Ainsi,

$$x(\sqrt{x^2+1}+x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

et donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

f) Par extraction des puissances dominantes au dénominateur,

$$f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}} = \frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}.$$

Puisque x tend vers $+\infty$ on considère $x>0$ d'où $|x|=x$ et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}.$$

g) Nous appliquons le conjugué :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{-1}\cdot(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}) = -x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}).$$

En passant à la limite,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left\{-x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2})\right\} = -\infty(\infty+\infty) = -\infty.$$

h) On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{2+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \sqrt{2}.$$

Exercice 4.
Vrai ou faux ?

a) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}$) et si $f(x) \geq 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

b) Si f est impaire et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -l$.

c) Si f est paire et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f est croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

e) Si $|f|$ est continue en tout point, alors f aussi est continue en tout point.

f) Si f n'est continue en aucun point, alors f^2 a la même propriété.

Solution.

a) *FAUX.*
En effet le comportement d'une fonction autour d'un point x_0 ne donne aucun renseignement sur le comportement de cette même fonction à l'infini. Par exemple $f(x) = \frac{1}{|x|}$ vérifie $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ tandis que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = 0$.
Remarque : si par contre on change la première limite en $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors le résultat est vrai, par la propriété des limites de compositions de fonctions continues (ici, la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) *VRAI.*
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \in [\alpha, \infty[$ implique $|f(x) - l| \leq \epsilon$. Posons $\beta = -\alpha$. Si $x \in]-\infty, \beta]$ on a que $-x \in [\alpha, \infty[$ et donc $|f(-x) - l| \leq \epsilon$. Puisque f est impaire ($f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), on trouve que $|-f(x) - l| \leq \epsilon\ \forall x \leq \beta$, ce qui implique $|f(x) + l| \leq \epsilon\ \forall x \leq \beta$. On a donc prouvé que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -l$.

c) *VRAI.*
L'argument est similaire au point ci-dessus, mais en utilisant la parité de f : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = f(x)$.

d) *FAUX.*
On peut prendre la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\lfloor x\rfloor - x$. Cette fonction n'est pas croissante (sur aucun intervalle) mais elle tend bien vers $+\infty$.

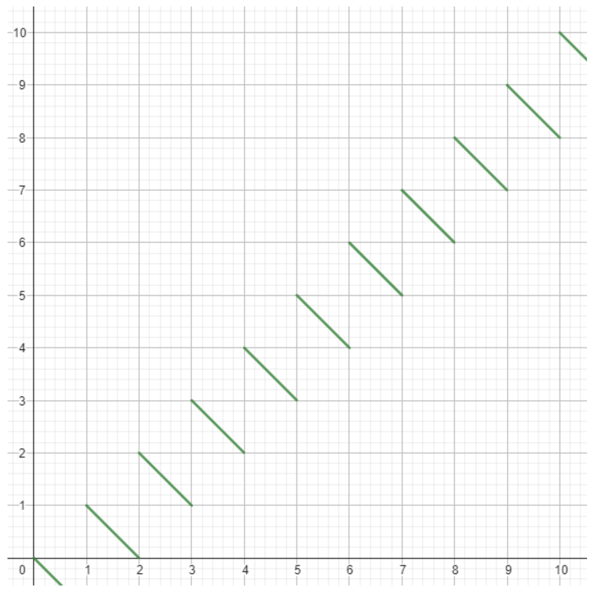

Figure 1 –

e) FAUX.
On peut prendre la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x \leq 0$. Cette fonction n'est pas continue en $x = 0$, mais $|f|$ (qui est la fonction constante égale á 1) est continue partout.

f) FAUX.
On peut prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Cette fonction n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$. Par contre son carré f^2 est la fonction constante égale à 1, qui est donc continue en tout point.

Exercice 5.
Calculer le limite à gauche et la limite à droite des fonctions suivantes en $x = 0$ et en déduire la continuité (ou pas) des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous en $x = 0$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}\,, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\,, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}\,, & x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Indication pour (b) : essayer de se ramener à une limite connue à l'aide d'une amplification bien choisie de la fraction.

Solution.

a) On a
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$
Donc, par continuité de la fonction $x \mapsto e^x$,
$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$$
et on déduit
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{1+\infty} = 0.$$
Par conséquent, f n'est pas continue à droite de 0. Par contre,
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$
Donc,
$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0$$
et on déduit
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1.$$
On a alors que f est continue à gauche de 0.

b) Nous écrivons
$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} = \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos(x)}}_{\to 1/2}.$$
Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$, et donc f est continue en 0.

c) On procède comme dans l'exemple de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *vu au cours pour montrer que* $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'a pas de limite en* 0 *et n'y est donc pas continue.*
Considerons les suites

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ *et* $b_n \neq 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. *De plus,*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0.$$

Par la caractérisation des limites de fonctions par les suites, on déduit que $\lim_{x\to0} f(x)$ *n'existe pas et donc* f *ne peut pas être continue en* 0. *En fait, on a trouvé deux suites* a_n, b_n *telles que* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, *mais* $f(a_n) \to 1$, $f(b_n) \to 0$. *Par le théorème d'unicité de la limite (c-á-d si la limite existe, elle est unique), la limite ne peut pas exister.*

d) Nous avons vu au cours que, par le théorème des deux gendarmes, $\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$. *Donc* f *est continue en* 0.

Exercice 6.
Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité des fonctions f suivantes au point x_0, ou alors montrer que f ne peut pas être prolongée par continuité en x_0.

a) $f\colon [0,1[\,\cup\,]1,\infty[\, \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}$ en $x_0 = 1$.

b) $f\colon]1,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3 - 3x + 2}$ en $x_0 = 1$.

Solution.

a) Comme l'expression de f *n'est pas définie en* $x_0 = 1$, *on doit calculer sa limite en ce point. On a vu dans l'Exercice 2 (*iii*) que* $\lim_{x\to1} f(x) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$.
Donc le prolongement par continuité de f *est*

$$\hat{f}_1\colon [0,\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}, & x \neq 1 \\[2ex] -\dfrac{\sqrt{6}}{4}, & x = 1 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : on peut aussi écrire le prolongement par continuité sans distinction de cas :

$$\hat{f}_1\colon [0,\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}}.$$

b) L'expression de f *n'étant pas définie pour* $x = 1$, *on doit calcule sa limite à droite en ce point. Comme le dénominateur de* f *s'écrit* $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ *on a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x\to1^+} \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} \\
&= \lim_{x\to1^+} \left(\left(\frac{x}{x+2}\right)\left(\frac{\tan(x-1)}{x-1}\right)\right) = \left(\lim_{x\to1^+} \frac{x}{x+2}\right)\left(\lim_{x\to1^+} \frac{\tan(x-1)}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x\to1^+} \left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \frac{1}{\cos(x-1)}\right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1 \colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3-3x+2}, & x>1 \\ \dfrac{1}{3}\,, & x=1 \end{cases}$$

Notez que ce prolongement par continuité ne s'écrit pas sans séparation des cas.

Partie II : Continuité sur des intervalles fermés

Exercice 7.
Soient I un intervalle, $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f.
Vrai ou faux ?

a) Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.
b) Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.
c) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.
d) Si $I =]a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, alors f atteint son minimum et son maximum sur I.
e) Si $I = [a,\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.
f) Si $I = [a,b]$ et f est strictement croissante, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.

Solution.

a) VRAI.
Par le corollaire 5.20 du cours, l'image de f est l'intervalle $[\min(f); \max(f)]$ qui est fermé et borné.

b) FAUX.
Prendre par exemple la fonction $f \colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors I est borné mais $f(I) =]1,\infty[$ n'est pas borné.

c) FAUX.
Prendre par exemple la fonction $f \colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ (fonction constante). Alors I est ouvert mais $f(I) = \{1\}$ est fermé.

d) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $]0;1]$. Alors f n'admet pas de maximum, car $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.

e) FAUX.
Prendre par exemple $a = 0$ et la fonction définie par $f(x) = x\sin(x)$. Elle n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\big(\frac{\pi}{2}+2\pi n\big) = \frac{\pi}{2}+2\pi n > n$ et $f\big(\frac{\pi}{2}-2\pi n\big) = \frac{\pi}{2}-2\pi n < -n$.

f) VRAI.
Par le corollaire 5.20 du cours, nous avons $f(I) = [\min(f); \max(f)]$. Puisque f est strictement croissante, nous avons forcément $\min(f) = f(a)$ et $\max(f) = f(b)$, d'où $f(I) = [f(a); f(b)]$.

Exercice 8.
Montrer que les équations suivantes admettent des solutions :

a) $e^{x-1} = x + 1$

b) $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$

Solution.

<u>Remarque</u> : Les solutions particulières (c-á-d les valeurs pour lesquelles on évalue f) données ci-dessous ne sont évidemment pas uniques, mais la méthodologie doit être suivie.

a) Pour utiliser le théorème de la valeur intermédiaire, on doit définir une fonction continue à partir de l'équation donnée. En l'occurrence, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{x-1} - x - 1$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composition de fonctions élémentaires. Comme $e = 2.7182\ldots$, on a $f(2) = e - 3 < 0$ et $f(3) = e^2 - 4 > 0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe alors $x_0 \in [2, 3]$ tel que $f(x_0) = 0$.

D'ailleurs, l'équation donnée admet une deuxième solution (mais il suffit ici de montrer l'existence d'une). En effet, on a $f(0) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ et $f(-1) = \frac{1}{e^2} > 0$ et donc par le théorème de la valeur intermédiaire il existe $x_0 \in [-1, 0]$ tel que $f(x_0) = 0$.

*La Figure **??** (gauche) montre le graphique de la fonction f, méttant en évidence ses deux racines. Notez que les valeurs des racines ont été estimées à l'aide d'un ordinateur et vous n'êtes pas sensé les trouver.*

b) Comme l'équation donnée n'est pas définie en $x = 0$, il faut définir la fonction f soit sur $]-\infty, 0[$ soit sur $]0, \infty[$ pour appliquer le théorème de la valeur intermédiaire sur un intervalle.

Si $x < 0$, on a $x^2 - \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{|x|} > 1$ car les deux termes sont toujours positifs et de plus l'un des deux est toujours ≥ 1. Par conséquent, l'équation n'admet pas de solution.

Ainsi, on définit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 1$. Cette fonction est continue (composition de fonctions élémentaires) et on a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) > 0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe alors $x_0 \in [1, 2]$ tel que $f(x_0) = 0$.

*La Figure **??** (droite) montre le graphique de la fonction f, méttant en évidence sa racine. Notez que la valeur de la racine a été estimée à l'aide d'un ordinateur et vous n'êtes pas sensé la trouver.*

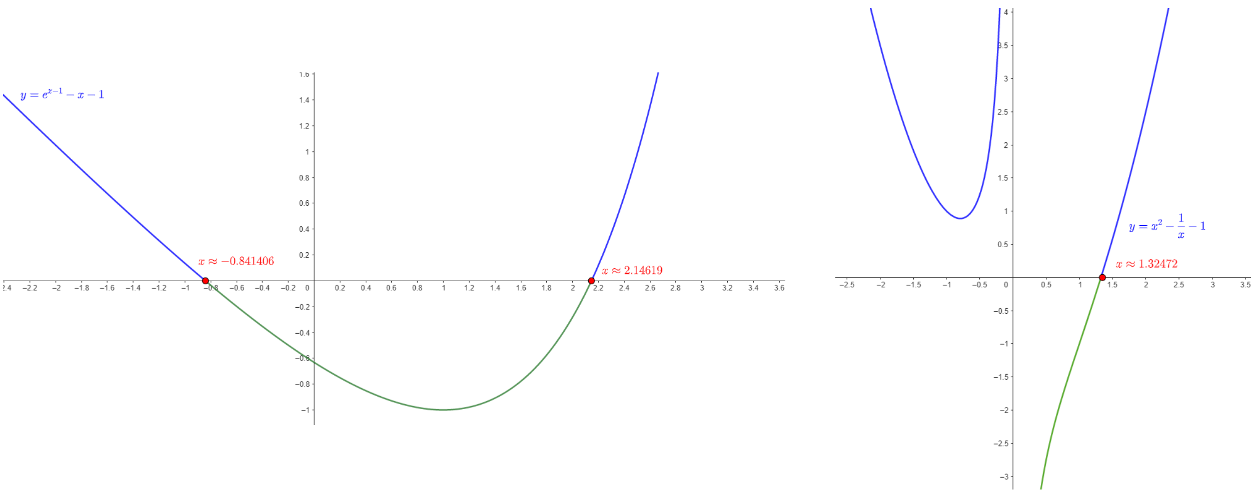

FIGURE 2 –

Exercices challenges.

Exercice 9.
Étudier la continuité des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous.

a) $f(x) = \arcsin\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right)$ b) $f(x) = x^4\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n - 1}{x^{2n}+1}\right)$

Indications : Commencer par calculer la limite $\lim_{n\to\infty}$ *de la suite interne en fonction de* x *et l'exprimer comme une fonction en morceaux. Exprimer ensuite* f *comme une fonction par morceaux, puis enfin etudier sa continuité.*

Solution.

a) On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}} = \begin{cases} 1, & x = k\pi \textit{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases}$$

En fait, si $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\cos x = \pm 1$ *et* $\sin x = 0$ *; par conséquent la limite vaut* 1. *Par contre, si* $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $|\cos x| < 1$ *et* $1+\sin(x)^{2n} > 1$. *On a donc que* $\left|\frac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right| < |\cos(x)^{2n}| \overset{n\to\infty}{\to} 0$ *et la limit vaut* 0 *par le corollaire au théorème des deux gendarmes.*
Finalement

$$f(x) = \arcsin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right) = \begin{cases} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}, & x = k\pi \textit{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \arcsin(0) = 0, & \textit{sinon} \end{cases}$$

Ainsi f *n'est pas continue aux points* $x = k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *et continue partout ailleurs.*

b) Comme x^4 *est continue, on regarde seulement la valeur de la limite en fonction de* x. *Comme*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \\ \textit{n'existe pas}, & x \leq -1 \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = \pm 1 \\ +\infty, & x > 1 \textit{ ou } x < -1 \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^{2n}+1} = \begin{cases} -1, & -1 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \textit{n'existe pas}, & x = -1 \\ 0, & x > 1 \textit{ ou } x < -1 \end{cases}$$

Ainsi f *n'est pas continue en* $x = \pm 1$ *(en fait elle est seulement continue à droite en* $x = 1$*) et continue partout ailleurs.*
Remarque : Notez la difference entre les cas $x = -1$ *et* $x < -1$.

- *Si* $x = -1$, *on calcule* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{(-1)^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$. *Comme* (-1^n) *oscille entre* -1 *(pour* n *impair) et* 1 *(pour* n *pair), cette limite n'esiste pas.*
- *Pour* $x < -1$, *c'est une bonne idée de réécrire la limite dans la forme suivante*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^n}}{x^n + \frac{1}{x^n}}.$$

Comme $x < -1$, $|x^n| \overset{n\to\infty}{\to} = +\infty$. *Par conséquent, la limite existe et elle vaut* 0.

Exercice 10.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et notons $\mathrm{Im}(f)$ l'image de f. Démontrer le corollaire du théorème d'existence des extréma et du théorème des valeurs intermédiaire, c'est à dire

$$\mathrm{Im}(f) = [\min(f); \max(f)],$$

autrement dit

f prends toutes les valeurs entre $\min(f)$ et $\max(f)$.

Indication : montrez la double inclusion.

Solution.

Par le théorème d'existence des extréma, il existe $c_m, c_M \in [a,b]$ *tels que* $f(c_m) = \min(f)$ *et* $f(c_M) = \max(f)$. *Montrons la double inclusion.*
($\subset$) *Pour tout* $x \in [a,b]$, *nous avons trivialement*

$$f(x) \in \; [f(c_m); f(c_M)] \; = \; [\min(f); \max(f),$$

d'où

$$\mathrm{Im}(f) \subset [\min(f); \max(f)].$$

($\supset$) *Soit* $h \in [\min(f); \max(f)] = [f(c_m); f(c_M)]$. *Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe* $x \in [c_m, c_M] \subset [a,b]$ *tel que* $f(x) = h$. *Ainsi,*

$$[\min(f); \max(f)] \subset \mathrm{Im}(f).$$