

Analyse I – Série 9

Echauffement. (V/F : Continuité sur un intervalle)

Soient I un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f .

	V	F
a) $f(I)$ est un intervalle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) (*) Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son min soit son max sur I .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
f) (*) Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
g) Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Sol.:

a) *VRAI.*

Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$ et soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à l'intervalle $[\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)]$, on a $]y_1, y_2[\subset f(I)$. Ceci étant vrai pour $y_1, y_2 \in f(I)$ quelconques, on déduit que $f(I)$ est un intervalle.

b) *VRAI.*

Cf. Théorème 3 du paragraphe 5.7 du cours.

c) *FAUX.*

Prendre par exemple la fonction $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors I est borné mais $f(I) =]1, \infty[$ n'est pas bornée.

d) *FAUX.*

Prendre par exemple la fonction $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ (fonction constante). Alors I est ouvert mais $f(I) = \{1\}$ est fermé.

e) *FAUX.*

Prendre par exemple la fonction $f: [-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors f n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\left(2\pi n \pm \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \in I$ mais

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) &= -\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi n + \frac{\pi}{2} > n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}\right) &= -\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi n + \frac{\pi}{2} < -n. \end{aligned}$$

f) FAUX.

Prendre par exemple la fonction définie par $f(x) = (x - a) \sin(x - a)$. Elle n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\left(a + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > n$ et $f\left(a - \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{\pi}{2} - 2\pi n < -n$.

g) VRAI.

Soient $y \in f(I)$ et $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Comme I est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset I$. Puisque f est strictement croissante, on a $f\left(x - \frac{r}{2}\right) < y < f\left(x + \frac{r}{2}\right)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à l'intervalle $\left[x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\right]$, on a $]f\left(x - \frac{r}{2}\right), f\left(x + \frac{r}{2}\right)[\subset f(I)$. Comme en plus $y \in]f\left(x - \frac{r}{2}\right), f\left(x + \frac{r}{2}\right)[$, il suit que $f(I)$ est ouvert en prenant $r_y = \min\left(f\left(x + \frac{r}{2}\right) - y, y - f\left(x - \frac{r}{2}\right)\right) > 0$ dans la définition d'ouvert.

Exercice 1. (Continuité à gauche et à droite)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}, & x > 3 \\ \alpha, & x = 3 \\ \beta x - 4, & x < 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

- a) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ b) $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ c) $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ d) $(1, 2)$ e) $(2, 2)$

Sol.:

Les limites à gauche et à droite de f en $x_0 = 3$ sont respectivement

$$\ell_- := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\beta x - 4) = 3\beta - 4$$

$$\ell_+ := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3x - 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x - 1}{x + 1} = \frac{8}{4} = 2$$

Comme $f(x_0) = \alpha$, la fonction f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \ell_- = \alpha$, et continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \ell_+ = \alpha$. Si, en plus, $\ell_- = \ell_+ = \alpha$, alors f est continue en x_0 .

- a) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = -\frac{5}{2}$ et $\ell_+ = 2$, f n'est ni continue à gauche ni continue à droite.
 b) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f est continue à gauche mais pas continue à droite.
 c) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f n'est pas continue à gauche mais continue à droite.
 d) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, on a bien $\ell_- = \ell_+$, mais f n'est quand-même ni continue à gauche ni continue à droite parce que les limites ne sont pas égales à $f(x_0)$.
 e) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, f est continue.

Comme illustration, les graphes sont tracés à la Fig. 1.

Exercice 2. (Théorème des valeurs intermédiaires)

Montrer que les équations suivantes admettent des solutions dans leurs domaines de définition :

- a) $e^{x-1} = x + 1$ b) $x^2 - \frac{1}{x} = 1$

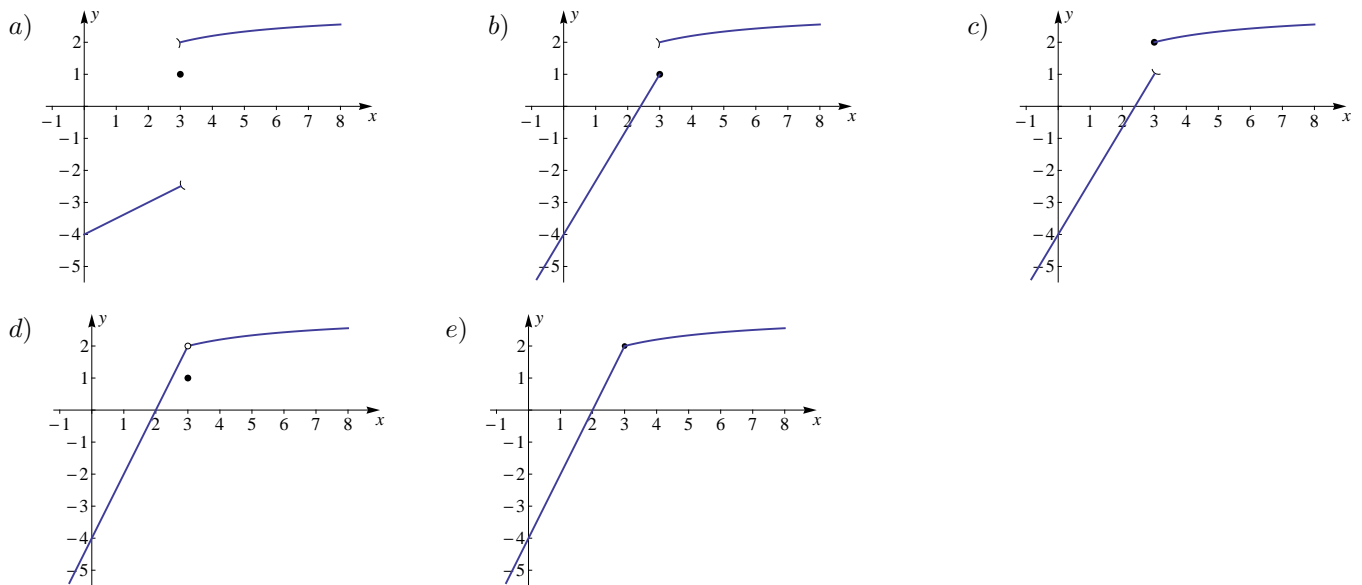


FIGURE 1 – : Graphes des fonctions $f(x)$

Sol.:

a) *Posons*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{x-1} - x - 1 \end{aligned}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur \mathbb{R} . De plus,

$$f(0) = \frac{1}{e} - 1 < 0 \text{ et } f(3) = e^2 - 4 > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [0, 3] \text{ tel que } f(\alpha) = 0$$

f a donc bien au moins 1 racine.

b) *Posons*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - \frac{1}{x} - 1 \end{aligned}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus,

$$f(1) = -1 < 0 \text{ et } f(2) = \frac{5}{2} > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [1, 2] \text{ tel que } f(\alpha) = 0$$

f a donc bien au moins 1 racine.

Exercice 3. (Algorithme de bisection)

En appliquant l'algorithme de bisection, localiser une solution de l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0$$

dans un intervalle de longueur $L \leq \frac{1}{8}$.

Sol.: On cherche une racine x_0 de la fonction $f(x) = x^3 + x - 1$, c'est-à-dire un x_0 qui satisfait $f(x_0) = 0$. L'algorithme de bisection permet en augmentant le nombre d'itérations de restreindre la taille de l'intervalle dans lequel se trouve x_0 .

Les étapes de l'algorithme sont données ci-dessous, où L est la longueur de l'intervalle dans lequel se trouve la solution x_0 .

$$\begin{aligned} f(0) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1 > 0 & \implies x_0 \in]0, 1[, \quad L = 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0 & \implies x_0 \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[, \quad L = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{3}{4}\right) = 0.172 > 0 & \implies x_0 \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right[, \quad L = \frac{1}{4} \\ f\left(\frac{5}{8}\right) = -0.130 < 0 & \implies x_0 \in \left] \frac{5}{8}, \frac{3}{4} \right[, \quad L = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ainsi $x_0 \in \left] \frac{5}{8}, \frac{3}{4} \right[=]0.625, 0.75[$. La valeur exacte est d'ailleurs $x_0 = 0.6823\dots$ (il est déconseillé de chercher à la trouver à la main...).

Exercice 4. (Dérivabilité)

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

Sol.: En tant que fonction polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il reste donc à étudier la dérivabilité de f en $x = 1$.

Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 1$ est la continuité en ce point, c'est-à-dire,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \iff \alpha + \beta = 3. \tag{1}$$

La fonction f est dérivable en $x = 1$ si les dérivées à gauche et à droite en ce point sont égales.

$$\begin{aligned} f'_{\text{gauche}}(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ f'_{\text{droite}}(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\alpha x + \beta - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\alpha x - \alpha + \overbrace{\alpha + \beta}^{=3 \text{ par (1)}} - 3}{x - 1} = \alpha, \end{aligned}$$

Donc $f'_{\text{gauche}}(1) = f'_{\text{droite}}(1) \iff \alpha = 1$. Il suit alors de (1) que $\beta = 2$.

Ainsi la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 5. (Dérivabilité)

Déterminer toutes les valeurs de l'entier $m \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée au point $x = 0$. Pour lesquelles de ces valeurs m la dérivée f' est-elle continue au point $x = 0$?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sin(x^m), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^m \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Sol.:

a) Pour $m \leq 0$, f n'est pas continue en $x = 0$ et donc pas dérivable non plus. En effet, on a

$$\begin{aligned} \text{pour } m = 0 : \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \sin(1) \neq 0 = f(0), \\ \text{pour } m \leq -1 : \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x^{|m|}}\right) \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

Pour $m \geq 1$, f est continue et dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables et $f'(x) = mx^{m-1} \cos(x^m)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On voit aussi que f' est continue sur \mathbb{R} comme produit et composition de fonctions continues.

b) On a

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \geq 2 \\ \text{n'existe pas,} & \text{si } m \leq 1 \end{cases}$$

Donc f admet une dérivée au point $x = 0$ si et seulement si $m \geq 2$ et on va seulement considérer ce cas ci-après.

La dérivée pour $x \neq 0$ est donnée par

$$f'(x) = mx^{m-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $m = 2$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas car $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas (comme vu en cours pour $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$). Ainsi f' existe partout mais n'est pas continue en $x = 0$ dans ce cas.

Pour $m \geq 3$, la limite existe et on a $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en $x = 0$.

Exercice 6. (Propriétés de la dérivée)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

- a) f paire $\Rightarrow f'$ impaire,
- b) f impaire $\Rightarrow f'$ paire,
- c) f périodique $\Rightarrow f'$ périodique.

Sol.:

- a) On a $f(-x) = f(x)$. En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient $-f'(-x) = f'(x)$, c'est-à-dire f' est impaire.
- b) On dérive $f(-x) = -f(x)$ pour obtenir $-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$. Ainsi f' est paire.
- c) Pour f périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant, on a $f'(x+T) = f'(x)$ et donc f' est aussi périodique.

Exercice 7. (Dérivées d'ordre supérieur)

Dans les trois cas suivants, calculer $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f , pour $n \in \mathbb{N}$:

a) $f(x) = x^m$ ($m \in \mathbb{Z}$) b) $f(x) = \sin(2x) + 2 \cos(x)$ c) $f(x) = \text{Log}(x)$

Sol.:

a) On distingue trois cas selon la valeur de m :

— $m = 0$: $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— $m \geq 1$: $f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)x^{m-n}, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases}$

— $m \leq -1$: $f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b) On commence par calculer les quatre premières dérivées de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos(2x) - 2 \sin(x) & f''(x) &= -4 \sin(2x) - 2 \cos(x) \\ f'''(x) &= -8 \cos(2x) + 2 \sin(x) & f^{(4)}(x) &= 16 \sin(2x) + 2 \cos(x) \end{aligned}$$

Il faut donc distinguer deux cas selon la parité de $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (2^n \sin(2x) + 2 \cos(x)), & n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2^n \cos(2x) - 2 \sin(x)), & n \text{ impair} \end{cases}$$

c) Comme $f'(x) = x^{-1}$, on peut utiliser le résultat de i) avec $m = -1$ pour obtenir $f^{(n)}$. En effet,

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = (-1)(-2)(-3) \cdots (-(n-1))x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Exercice 8. (Dérivée d'une composée de fonctions)

Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions f, g définies par

a) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1) \sin(x)^7 \cos(x)^4$ et $g(x) = \text{Log}(x)^3$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) + 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = (x-1)^4$.

Sol.: Comme on a $(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$, il faut calculer les dérivées de f et g dans les points concernés.

a) On a $f(0) = 5 > 0$ et f est continue, donc la composée $g \circ f$ est bien définie au voisinage de 0 (c'est à dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $g \circ f$ est définie sur $] -\delta, \delta[$) et donc le calcul de la dérivée en 0 fait sens. Pour calculer $f'(x)$, écrivons $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)u(x)$ où $u(x) = \sin(x)^7 \cos(x)^4$. Alors

$$f'(x) = 2 + e^x u(x) + (e^x - 1) u'(x) \quad \text{et} \quad u'(x) = 7 \sin(x)^6 \cos(x)^5 - 4 \sin(x)^8 \cos(x)^3.$$

Ainsi $u(0) = u'(0) = 0$ et donc $f'(0) = 2$.

Ensuite on a $g'(x) = \frac{3 \text{Log}(x)^2}{x}$. Puisque $f(0) = 3$ on trouve finalement

$$(g \circ f)'(0) = g'(3) \cdot f'(0) = \frac{3 \text{Log}(3)^2}{3} \cdot 2 = 2 \text{Log}(3)^2.$$

b Pour calculer $f'(0)$, il faut utiliser la définition de la dérivée :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2\right) = 2$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ comme on a montré à l'Ex. 3iv) de la Série 8.

Comme $g'(x) = 4(x - 1)^3$ et $f(0) = 0$, on obtient

$$(g \circ f)'(0) = g'(0) \cdot f'(0) = (-4) \cdot 2 = -8.$$

Exercice 9. (Calcul de dérivées)

Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner les domaines de f et f' .

a) $f(x) = \frac{5x + 2}{3x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2)$

d) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ (sans formulaire !)

e) $f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})}$

f) $f(x) = \sqrt[5]{(2x^4 + e^{-(4x+3)})^3}$

g) $f(x) = \operatorname{Log}_3(\operatorname{ch}(x))$

h) $f(x) = \operatorname{Log}(4^{\sin(x)})e^{\cos(4x)}$

Sol.:

a) $f'(x) = \frac{5(3x^2 - 1) - 6x(5x + 2)}{(3x^2 - 1)^2} = -\frac{15x^2 + 12x + 5}{(3x^2 - 1)^2}$; $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

b) $f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$; $D(f) = D(f') =]-1, 1[$

c) $f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) \cdot \cos(x^2) + \sin(x)^2 \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x$
 $= 2 \sin(x) (\cos(x) \cos(x^2) - x \sin(x) \sin(x^2))$; $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$.

d) En appliquant la règle de dérivation d'un quotient à $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on obtient

$$f'(x) = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

et donc $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) Il s'agit de plusieurs composées de fonctions. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})}} \cos(\sqrt{\sin(x)}) \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin(x)}} \cos(x) \\ &= \frac{\cos(\sqrt{\sin(x)}) \cos(x)}{4 \cdot \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})} \cdot \sqrt{\sin(x)}}. \end{aligned}$$

Le domaine de f est

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin(x) \geq 0 \text{ et } \sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right) \geq 0 \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

En effet, $\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ et pour ces valeurs, on a $\sqrt{\sin(x)} \in [0, 1]$ si bien que $\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right) \geq 0$, c'est-à-dire f est bien définie.

Pour le domaine de f' , il faut encore exclure les points où $\sin(x) = 0$, c'est-à-dire

$$D(f') = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[.$$

$$f) \quad f'(x) = \frac{3}{5} \left(2x^4 + e^{-(4x+3)}\right)^{-2/5} \left(8x^3 - 4e^{-(4x+3)}\right) = \frac{12 \left(2x^3 - e^{-(4x+3)}\right)}{5 \sqrt[5]{\left(2x^4 + e^{-(4x+3)}\right)^2}};$$

$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ (Le dénominateur de f' ne s'annule jamais parce que $e^{-(4x+3)} > 0$ et $x^4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

g) On transforme d'abord le logarithme de base 3 en base e :

$$f(x) = \text{Log}_3(\text{ch}(x)) = \frac{\text{Log}(\text{ch}(x))}{\text{Log}(3)}.$$

$$\text{Ainsi } f'(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{Log}(3) \text{ch}(x)} = \frac{\text{th}(x)}{\text{Log}(3)} \quad \text{et} \quad D(f) = D(f') = \mathbb{R}.$$

h) En observant que $f(x) = \sin(x) \text{Log}(4) e^{\cos(4x)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Log}(4) \cos(x) e^{\cos(4x)} + \text{Log}(4) \sin(x) \cdot (-4 \sin(4x)) \cdot e^{\cos(4x)} \\ &= \text{Log}(4) e^{\cos(4x)} \left(\cos(x) - 4 \sin(x) \sin(4x) \right). \end{aligned}$$

$$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$$

Exercice 10. (V/F : Dérivation)

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) (*) Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a-\delta, a+\delta[$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si f est dérivable sur \mathbb{R} , alors $g(x) = \sqrt{f^2(x)}$ est dérivable sur \mathbb{R} . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

a) FAUX.

Prendre par exemple $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Cette fonction est continue en $x = 0$ parce qu'on a

$$0 \leq f(x) \leq x^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suit par le théorème des deux gendarmes que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Par contre f n'est pas continue ailleurs qu'en 0. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle ouvert $]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[$ contient des nombres rationnels et irrationnels. En prenant $a_n \in]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[\cap \mathbb{Q}$ et $b_n \in]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient deux suites $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ et $(b_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui convergent les deux vers x_0 quand $n \rightarrow \infty$. Mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = x_0^2 > 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n),$$

et donc f n'est pas continue en x_0 .

Pour voir que f est dérivable en $x = 0$, observer que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

et ainsi $-|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De nouveau par le théorème des deux gendarmes on conclut que

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

b) FAUX.

Prendre par exemple $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0. Les dérivées unilatérales en 0 existent mais elles ne sont pas égales.

c) FAUX.

En prenant $f(x) = x$, on a $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. cours).

d) VRAI.

On a $f'(1) = 2 - 2 = 0$ et donc $(f \circ f)'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = 0$.