Partie I : Limites et continuité

Exercice 1.
Est-ce que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}\,, & x > 1 \\ 3\,, & x \leq 1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.
Calculer les limites ci-dessous.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$,
où $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$.

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(\sqrt{x}-1)}{x-1}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+\alpha)^n-\alpha^n}{x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.
Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|x|(x+1)}{3x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin(1/x)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1}$.

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}$.

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}$.

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Exercice 4.
Vrai ou faux ?

a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}$) et si $f(x) \geq 0$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

b) Si f est impaire et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -l$.

c) Si f est paire et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f est croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

e) Si $|f|$ est continue en tout point, alors f aussi est continue en tout point.

f) Si f n'est continue en aucun point, alors f^2 a la même propriété.

Exercice 5.
Calculer le limite à gauche et la limite à droite des fonctions suivantes en $x = 0$ et en déduire la continuité (ou pas) des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous en $x = 0$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}\,, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\,, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}\,, & x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Indication pour (b) : essayer de se ramener à une limite connue à l'aide d'une amplification bien choisie de la fraction.

Exercice 6.
Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité des fonctions f suivantes au point x_0, ou alors montrer que f ne peut pas être prolongée par continuité en x_0.

a) $f\colon [0,1[\cup]1,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$ en $x_0 = 1$.

b) $f\colon]1,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3-3x+2}$ en $x_0 = 1$.

Partie II : Continuité sur des intervalles fermés

Exercice 7.
Soient I un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f.
Vrai ou faux ?

a) Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.
b) Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.
c) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.
d) Si $I =]a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint son minimum et son maximum sur I.
e) Si $I = [a,\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.
f) Si $I = [a,b]$ et f est strictement croissante, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.

Exercice 8.
Montrer que les équations suivantes admettent des solutions :

a) $e^{x-1} = x+1$

b) $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$

Exercices challenges.

Exercice 9.
Étudier la continuité des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous.

a) $f(x) = \arcsin\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right)$

b) $f(x) = x^4 \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n-1}{x^{2n}+1}\right)$

Indications : Commencer par calculer la limite $\lim_{n\to\infty}$ de la suite interne en fonction de x et l'exprimer comme une fonction en morceaux. Exprimer ensuite f comme une fonction par morceaux, puis enfin etudier sa continuité.

Exercice 10.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et notons $\mathrm{Im}(f)$ l'image de f. Démontrer le corollaire du théorème d'existence des extréma et du théorème des valeurs intermédiaire, c'est à dire

$$\mathrm{Im}(f) = [\min(f); \max(f)],$$

autrement dit

$$f \text{ prends toutes les valeurs entre } \min(f) \text{ et } \max(f).$$

Indication : montrez la double inclusion.

Solutions.

2. a) $+\infty,\ -\infty$
   b) 0
   c) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$
   d) 0
   e) 1
   f) $\frac{1}{2}$
   g) $n\alpha^{n-1}$

3. a) $-\frac{1}{3}$
   b) 0
   c) 0
   d) $-\frac{1}{2}$
   e) $-\frac{1}{2}$
   f) $\frac{1}{1-\sqrt{2}} = -1 - \sqrt{2}$
   g) $-\infty$
   h) $\sqrt{2}$

4. a) FAUX
   b) VRAI
   c) VRAI
   d) FAUX
   e) FAUX
   f) FAUX

7. a) VRAI
   b) FAUX
   c) FAUX
   d) FAUX
   e) FAUX
   f) VRAI