

Analyse I – Série 9

Echauffement. (V/F : Continuité sur un intervalle)

Soient I un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f .

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) $f(I)$ est un intervalle. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si I est borné, alors $f(I)$ est borné. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) (*) Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son min soit son max sur I . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| f) (*) Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| g) Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Exercice 1. (Continuité à gauche et à droite)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}, & x > 3 \\ \alpha, & x = 3 \\ \beta x - 4, & x < 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

- a) $(1, \frac{1}{2})$ b) $(1, \frac{5}{3})$ c) $(2, \frac{5}{3})$ d) $(1, 2)$ e) $(2, 2)$

Exercice 2. (Théorème des valeurs intermédiaires)

Montrer que les équations suivantes admettent des solutions dans leurs domaines de définition :

- a) $e^{x-1} = x + 1$ b) $x^2 - \frac{1}{x} = 1$

Exercice 3. (Algorithme de bisection)

En appliquant l'algorithme de bisection, localiser une solution de l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0$$

dans un intervalle de longueur $L \leq \frac{1}{8}$.

Exercice 4. (Dérivabilité)

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

Exercice 5. (Dérivabilité)

Déterminer toutes les valeurs de l'entier $m \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée au point $x = 0$. Pour lesquelles de ces valeurs m la dérivée f' est-elle continue au point $x = 0$?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sin(x^m), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^m \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6. (Propriétés de la dérivée)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

- a) f paire $\Rightarrow f'$ impaire,
- b) f impaire $\Rightarrow f'$ paire,
- c) f périodique $\Rightarrow f'$ périodique.

Exercice 7. (Dérivées d'ordre supérieur)

Dans les trois cas suivants, calculer $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f , pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{a) } f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z}) \qquad \text{b) } f(x) = \sin(2x) + 2 \cos(x) \qquad \text{c) } f(x) = \text{Log}(x)$$

Exercice 8. (Dérivée d'une composée de fonctions)

Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions f, g définies par

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1) \sin(x)^7 \cos(x)^4 & \text{et } g(x) = \text{Log}(x)^3. \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & \text{et } g(x) = (x - 1)^4. \end{array}$$

Exercice 9. (Calcul de dérivées)

Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner les domaines de f et f' .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{5x + 2}{3x^2 - 1} & \text{b) } f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{c) } f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2) & \text{d) } f(x) = \text{tg}(x) \text{ (sans formulaire!)} \\ \text{e) } f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})} & \text{f) } f(x) = \sqrt[5]{(2x^4 + e^{-(4x+3)})^3} \\ \text{g) } f(x) = \text{Log}_3(\text{ch}(x)) & \text{h) } f(x) = \text{Log}(4^{\sin(x)})e^{\cos(4x)} \end{array}$$

Exercice 10. (V/F : Dérivation)

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) (*) Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a - \delta, a + \delta[$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si f est dérivable sur \mathbb{R} , alors $g(x) = \sqrt{f^2(x)}$ est dérivable sur \mathbb{R} . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |