Corrigé série 9

Exercice 1 (10 points)

a) En utilisant trois fois la règle de Bernoulli-L'Hospital, on voit que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x-\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\cos(2x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+4\sin(2x)}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+8\cos(2x)}{\cos x}=6.\end{aligned}$$

b) En fait, on peut évaluer la fonction $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ au point $x=\pi$. Ainsi, par continuité, on a

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{\sin\pi}{1-\cos\pi}=\frac{0}{1-(-1)}=0.$$

c) En utilisant trois fois Bernoulli-L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}.$$

d) En utilisant une fois Bernoulli-L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{2x}=0.$$

e) On utilise ici la règle de Bernoulli-L'Hospital sans la mentionner explicitement.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos(x))}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin(1-\cos(x))}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(1-\cos(x))\sin(x)^2+\cos(x)\sin(1-\cos(x))}{12x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)[-3\cos(x)\cos(1-\cos(x))+(1+\sin(x)^2)\sin(1-\cos(x))]}{24x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(x)^2\cos(1-\cos(x))-\cos(1-\cos(x))\sin(x)^2(4+\sin(x)^2)}{24}\\&\quad+\frac{\cos(x)(-4+3\cos(2x))\sin(1-\cos(x))}{24}=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

f) Pour cette limite, on procède plus directement

$$\left|\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}\right|\le\left|\frac{x^2}{\sin(x)}\right|=\frac{|x|}{\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{|0|}{|1|}=0.$$

Exercice 2 (20 points)

a) Soit $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$. Alors :

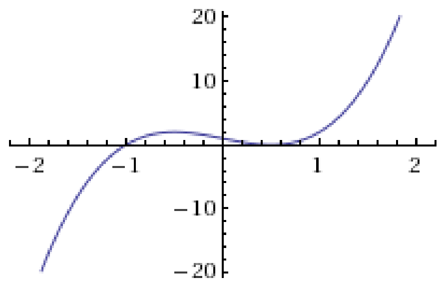
— Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, f n'a pas de parité/périodicité.

— $f'(x) = 12x^2 - 3$, qui vaut 0 en $x = \pm\frac{1}{2}$.

— f a un maximum local en $x = -\frac{1}{2}$; f a un minimum local en $x = \frac{1}{2}$.

— $f''(x) = 24x$, qui vaut 0 en $x = 0$ et est un point d'inflexion de f.

— f est croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$; f est décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.



b) Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 5}{x}$. Alors :

— Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} - \{0\}$, f n'a pas de parité/périodicité.

— f a un asymptote vertical en $x = 0$. La fonction $g(x) = x - 1$ est l'asymptote oblique de f lorsque $x \to \pm\infty$.

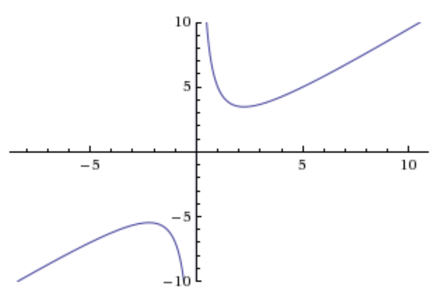
— $f'(x) = 1 - \dfrac{5}{x^2}$, qui vaut 0 en $x = \pm\sqrt{5}$.

— $f''(x) = \dfrac{10}{x^3}$, qui ne vaut jamais 0. Notons que $f''(x) < 0$ (f est concave) pour $x < 0$, et $f''(x) > 0$ (f est convexe) pour $x > 0$.

— Donc f a un maximum local en $x = -\sqrt{5}$; f a un minimum local en $x = \sqrt{5}$.

— f est croissante sur $]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, \infty[$; f est décroissante sur $]-\sqrt{5}, 0[\cup]0, \sqrt{5}[$.

— f n'a aucun point d'inflexion.



c) Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

— Le domaine de définition de f est $[-1,1]$, f est une fonction paire.

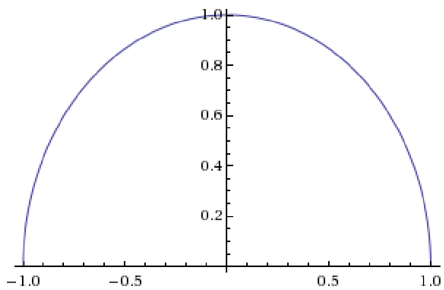
— $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, qui vaut 0 en $x=0$.

— $f''(x) = \dfrac{-1}{(1-x^2)^{3/2}}$, qui est strictement négative pour tout x. Ainsi, f est toujours concave.

— f a un maximum global en $x=0$. De plus, f a deux minima globaux aux extrémités de son domaine de définition, $x=\pm 1$.

— f est croissante sur $]-1,0[$; f est décroissante sur $]0,1[$.

— f n'a aucun point d'inflexion.



d) Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x}$.

— Le domaine de définition de f est tout $\mathbb{R}$.

— f a une asymptote oblique en $y=x$. En effet,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}}{x} = 1$$

En posant le changement de variables $u = \sqrt[3]{1-\dfrac{3}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}-1\right) = \lim_{u\to 1}\sqrt{\frac{3}{u^3-1}}(u-1) = \lim_{u\to 1}\sqrt{\frac{3(u-1)^2}{(u-1)(u^2+u+1)}}$$
$$= \lim_{u\to 1}\sqrt{\frac{3(u-1)}{u^2+u+1}} = 0$$

— $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^3-3x)^{2/3}}$, qui n'est pas définie quand $x^3-3x=0$, c'est-à-dire $x = 0, \pm\sqrt{3}$. Notons que $f'(x)=0$ quand $x=\pm 1$. f est croissante sur $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ et décroissante ailleurs.

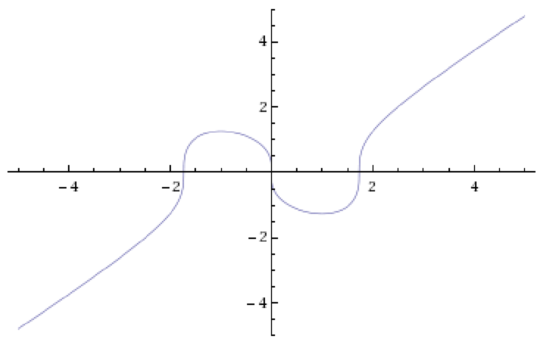
— On a

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)}{(x^3-3x)^{5/3}}.$$

Le numérateur est toujours strictement négatif. Ainsi,

$$f''(x) = \begin{cases} < 0 & \text{si } x < -\sqrt{3} \text{ ou } 0 < x < \sqrt{3}; \\ > 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

— Donc f a un maximum local au point $x = -1$ et un minimum local au point $x = 1$.
— La fonction f est impaire.



Exercice 3 (10 points)
En suivant la configuration de la figure, on obtient une boîte de hauteur h, du profondeur $c - 2h$, et de largeur $c - 2h$. Le volume d'une telle boîte est

$$f(h) = h(c - 2h)^2, \quad \text{où } h \in \left[0, \frac{c}{2}\right].$$

On voit facilement que f n'admet pas le maximum aux extrémités de son domaine de définition. Par exemple, $f(0) = f\left(\frac{c}{2}\right) = 0 < f\left(\frac{c}{6}\right) = \frac{2c^3}{27}$. Ainsi, f doit admettre un maximum à l'intérieur de son domaine.
Par la théorème sur la dérivation de fonctions composées, on a

$$f'(h) = (c - 2h)^2 + h \cdot 2 \cdot (-2)(c - 2h) = (c - 2h)(c - 6h)$$

qui vaut 0 quand $h = \frac{c}{2}$ ou $h = \frac{c}{6}$.
On a déjà vu que f n'admet pas de maximum en $h = \frac{c}{2}$.
On montre que f admet un maximum au point $h = \frac{c}{6}$. Notons que

$$f''(h) = -2(c - 6h) + (-6)(c - 2h) = 24h - 8c.$$

Donc, $f''\left(\frac{c}{6}\right) = 24 \cdot \frac{c}{6} - 8c = -4c < 0$. Ainsi, le volume maximal de la boîte est obtenu quand $h = \frac{c}{6}$, et ce volume maximal est donc $f\left(\frac{c}{6}\right) = \frac{2c^3}{27}$.

Exercice 4 (5 points)

La distance entre un point sur la courbe $y = x^2 - 9$ et $(0,0)$ est

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2-9)^2} = \sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}.$$

Soit $f(x) = \sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}$. Comme $f(x)$ est continue et $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to \pm\infty$, $f(x)$ admet un minimum global pour un certain $x \in \mathbb{R}$. De plus, comme $f(x) > 0$ pour tout x, la fonction $g(x) = (f(x))^2$ admet ses extrema pour les mêmes valeurs de x que f. En particulier, $g(c)$ est minimal si et seulement si $f(c)$ est minimal. (Il est un peu plus facile de travailler avec g que f.)

On a $g'(x) = 4x^3 - 34x = x(4x^2 - 34)$ qui vaut 0 quand $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$.

On a aussi $g''(x) = 12x^2 - 34$. Alors, $g''(0) < 0$ et $g''\left(\pm\sqrt{\frac{17}{2}}\right) > 0$. Cela montre que $g(x)$ est minimal quand $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$. Ainsi, $f(x)$ réalise son minimum global quand $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$, et ce minimum est

$$f\left(\sqrt{\frac{17}{2}}\right) = \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - 17\left(\frac{17}{2}\right) + 81} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Exercice 5 (5 points)

a) **Vrai.** On va montrer que $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:
Soit $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$. Alors,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x + 6\sin x\cos^3 x - 6\sin^3 x\cos x \\
&= (6\sin x\cos x)\left(\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x\right) \\
&= (6\sin x\cos x)\left(\sin^4 x - \cos^4 x + (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x\right) \\
&= (6\sin x\cos x)\left((1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \cos^4 x\right) \\
&= (6\sin x\cos x)\left((1 - \sin^2 x)^2 - \cos^4 x\right) \\
&= (6\sin x\cos x)\left(\cos^4 x - \cos^4 x\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc, $f(x)$ est constante. De plus, $f(x) = 1$ pour tout x, car $f(0) = 1$.

b) **Vrai.** Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \qquad \text{si } x > 0.$$

De plus, comme
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$
on voit par le théorème des deux gendarmes que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

c) **Vrai.** Pour trouver la limite en 0 de $\dfrac{\cos x - 1}{x}$, on peut utiliser la règle de l'Hôpital comme
$$\lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = \lim_{x\to 0} x = 0.$$
On procède donc au calcul :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0.$$

d) **Faux.** La fonction $f(x) = x$ est concave et convexe, mais n'est pas constante. (En fait, on peut montrer que toute fonction f réelle continue qui est concave et convexe sur tout $\mathbb{R}$ est de la forme $f(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.)

Exercice 6 (5 points)

Supposons que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes. Alors, si $x, y \in [a, b]$ et $0 \leq t \leq 1$, on a
$$\begin{aligned}(f+g)(tx+(1-t)y) &= f(tx+(1-t)y) + g(tx+(1-t)y)\\ &\leq tf(x) + (1-t)f(y) + tg(x) + (1-t)g(y)\\ &= t\left[(f+g)(x)\right] + (1-t)\left[(f+g)(y)\right].\end{aligned}$$
Ainsi, la fonction $f+g$ est aussi convexe.

Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes, il n'est pas toujours vrai que $f \cdot g$ est aussi convexe. Par exemple, soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Alors, f et g sont convexes (sur tout $\mathbb{R}$), mais $f \cdot g = x^3$, qui n'est pas convexe : pour voir cela, prenons $t = \frac{1}{2}$, $x < 0$ et $y = 0$. Alors,
$$\begin{aligned}(f\cdot g)\left(\frac{x}{2} + \frac{0}{2}\right) &= (f\cdot g)\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{8} > \frac{x^3}{2} \quad (\text{car } x < 0)\\ &= \frac{1}{2}(f\cdot g)(x) + \frac{1}{2}(f\cdot g)(0).\end{aligned}$$

Exercice 7 (5 points)
Par symétrie, la parabole doit passer aussi par $(-3,0)$. Ainsi, la parabole est de la forme

$$y = k(x-3)(x+3), \quad \text{pour un certain } k \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de trouver k en substituant $x = 0$ dans l'équation ci-dessus. On trouve que l'équation de la parabole est $y = -\frac{4}{9}(x-3)(x+3)$.
Si on dessine un rectangle "posé" sur l'axe horizontal, les sommets du rectangle sont alors (par symétrie)

$$(x,0),\ (-x,0),\ (x,f(x)) \text{ et } (-x,f(-x)), \quad \text{pour un certain } x \in]0,3[.$$

L'aire d'un tel rectangle est

$$A(x) = 2x \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)(x-3)(x+3) = 8x - \frac{8}{9}x^3.$$

On a

$$A'(x) = 8 - \frac{8}{3}x^2,$$

qui a une racine dans $]0,3[$, à savoir $x = \sqrt{3}$.
Par ailleurs, $A(x)$ admet un maximum local en $x = \sqrt{3}$, car

$$A''(x) = -\frac{16}{3}x < 0 \quad \text{pour tout } x \in]0,3[.$$

Ainsi, l'aire maximale du rectangle inscrit est

$$A\left(\sqrt{3}\right) = 8\left(\sqrt{3}\right) - \frac{8}{9}\left(\sqrt{3}\right)^3 = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$