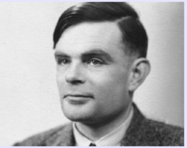
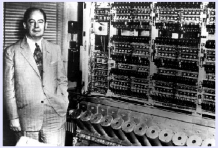
  

Information, Calcul et Communication

Compléments de cours

EPFL

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2018 Q1.4

$f_1 = 10$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x(mT_e)$

$f_2 = 12$

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \boxed{a_m} \operatorname{sinc}(\boxed{30}\, t - m)$$?

$f_e \to f_e = 30$

$f_1/f_e = \frac{1}{3}$

où $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ et $a_m = 7\sin(\frac{2\pi}{3}m + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(\frac{4\pi}{5}m + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(\frac{2\pi}{6}m)$.

$f_2/f_e = 2/5$

$f_3/f_e = 1/6$

Écrire $f(t)$ comme la somme de trois fonctions sinus :

Est-ce que on peut trouver $x(t)$ tq $a_m = x(mT_e)$?

$f_3 = 5$

$x : \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \sin(2\pi f_k t + \varphi_k)$

1 seul sinus, éch. to les mT_e

$\alpha \sin(2\pi f \cdot m T_e + \varphi)$

$\sin(2\pi \cdot (\frac{f}{f_e}) \cdot m + \varphi)$

Conclusion :

$f(t) = x(t)$

$$7 \sin\left(\frac{2\pi}{3} n + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\alpha \sin\left(2\pi\left(\frac{f}{f_e}\right)n + \varphi\right)$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{f}{f_e} = \frac{1}{3}$$

$$f_e > 2 f_{max}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f_{max}}{f_e} < \frac{1}{2}$$

$$x(t) = 7 \sin\left(2\pi \cdot 10 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) + \ldots$$

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2018 Q1.4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \operatorname{sinc}(30\,t - m)$$

où $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ et $a_m = 7\sin(\frac{2\pi}{3}m + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(\frac{4\pi}{5}m + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(\frac{2\pi}{6}m)$.

Écrire $f(t)$ comme la somme de trois fonctions sinus :

Voyons a_m comme les échantillons d'un signal $g(t)$ échantillonné à $f_e = 30$ Hz (le coefficient de t dans le sinc) : c.-à-d. que l'on veut écrire $a_m = g(m\,T_e) = g(\frac{m}{f_e})$, avec donc

$$g(t) = 7\sin(2\pi\,\frac{f_e}{3}\,t + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(2\pi\,\frac{2\,f_e}{5}\,t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(2\pi\,\frac{f_e}{6}\,t)$$

$\frac{f_e}{2}$ étant strictement supérieure à La bande passante de g (qui est $\frac{2\,f_e}{5}$), g sera reconstruite parfaitement par la formule de reconstruction, et on a donc pour tout t, $f(t) = g(t)$, c.-à-d. :

$$f(t) = 7\sin(20\pi\,t + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(24\pi\,t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(10\pi\,t)$$

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q6

Soit X le signal défini par :

$$X(t) = \sin(\overset{3}{6\pi t} + \frac{\pi}{4}) + \cancel{3\sin(\overset{15}{30\pi t} + \frac{\pi}{3})} + 2\sin(\overset{6}{12\pi t}).$$

X : $f_{max} = 6$ après filtre

X est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\boxed{f_c = 12 \text{ Hz},}$ puis échantillonné à une fréquence $\boxed{f_e = 14 \text{ Hz}.}$

$14 > 2 \cdot 6$ ✓

À partir de ces échantillons, on reconstruit le signal Y en utilisant la formule de reconstruction vue en cours.

$\Rightarrow$ reconstruction exacte

Quelle est la forme mathématique du signal $Y(t)$?

$$Y(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(12\pi t)$$

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q6

Soit X le signal défini par :

$$X(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + 3\sin(30\pi t + \frac{\pi}{3}) + 2\sin(12\pi t).$$

X est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 12$ Hz, puis échantillonné à une fréquence $f_e = 14$ Hz.

À partir de ces échantillons, on reconstruit le signal Y en utilisant la formule de reconstruction vue en cours.

Quelle est la forme mathématique du signal $Y(t)$?

$$Y(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(12\pi t)$$

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q13

Un enfant de vos connaissances veut enregistrer, et envoyer par message, un chant à sa grand-mère.
Fort(e) de vos connaissances en ICC, vous l'aidez à construire une transmission optimale.
Sachant que sa voix se situe entre 1000 et 3500 Hz (au dessus il n'y a que du bruit) et que pour des raisons techniques, il n'est pas possible d'acquérir plus que 8000 échantillons par seconde, quelle procédure lui conseillez-vous :

$f_e/2$

- filtrage (passe-bas) : oui ou non ?
- Si oui :
  - avant ou après échantillonnage ?
  - avec quelle fréquence de coupure ? f_c ?
- À quelle fréquence conseillez-vous d'échantillonner ? Pourquoi ?
- Le chant pourra-t-il être correctement reconstruit à l'arrivée ? Pourquoi ?

$f_c < 4000$

$f_c > 3500$

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q13

Un enfant de vos connaissances veut enregistrer, et envoyer par message, un chant à sa grand-mère.
Fort(e) de vos connaissances en ICC, vous l'aidez à construire une transmission optimale.
Sachant que sa voix se situe entre 1000 et 3500 Hz (au dessus il n'y a que du bruit) et que pour des raisons techniques, il n'est pas possible d'acquérir plus que 8000 échantillons par seconde, quelle procédure lui conseillez-vous :

- filtrage (passe-bas) : **oui** (nécessaire si l'on ne veut pas avoir de « repliement de spectre » du bruit)
- Si oui :
  - avant ou après échantillonnage ? **avant**
  - avec quelle fréquence de coupure ? **un peu au dessus (mais assez proche) de 3500 Hz**
- À quelle fréquence conseillez-vous d'échantillonner ? Pourquoi ? **un peu au dessus de 2 fois la fréquence de coupure, ou, si possible à 8000 Hz**
- Le chant pourra-t-il être correctement reconstruit à l'arrivée ? Pourquoi ? **oui tant que les choix faits respectent $f_e > 2f_c$**

Leçons II.1 et II.2 – Mix Examens 2015–2016

Soit $X(t)$ un signal quelconque défini sur $\mathbb{R}$, de bande passante $f_{\max} > 0$, et soit $X_I(t)$ sa reconstruction (suivant la formule du cours) après échantillonnage à une fréquence $f_e = 1/T_e$.

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

A] $\forall f_e \geq 3f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

B] $\forall f_e \quad 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

C] $\forall f_e \quad 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) \neq X(t)$

D] $\cancel{\forall f_e \quad 0 < f_e < 2f_{\max}} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad X_I(nT_e) = X(nT_e)$

E] Si $f_e = 2f_{\max}$, il est possible que $\forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

	VRAI	FAUX
A	bcp	$\emptyset$
B	$\emptyset$	bcp
C	1	bcp
D	bcp	1
E	bcp	$1\frac{1}{2}$

Leçons II.1 et II.2 – Mix Examens 2015–2016

Soit $X(t)$ un signal quelconque défini sur $\mathbb{R}$, de bande passante $f_{\max} > 0$, et soit $X_I(t)$ sa reconstruction (suivant la formule du cours) après échantillonnage à une fréquence $f_e = 1/T_e$.

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

*A] $\forall f_e \geq 3f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

B] $\forall f_e \quad 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

C] $\forall f_e \quad 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) \neq X(t)$

*D] $\forall f_e \quad 0 < f_e < 2f_{\max} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad X_I(nT_e) = X(nT_e)$

*E] Si $f_e = 2f_{\max}$, il est possible que $\forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

Leçon II.3 (entropie) – Points clés

- compression sans perte / compression avec perte
- définition (formelle) de l'entropie
- (quatre) propriétés de l'entropie
- algorithme (de compression) de Shannon-Fano

valeurs : V
alphabet

$$-\sum_{v \in V} p_v \log_2 p_v$$

mesurée en bits

1) $H(X) \geq 0$

2) $H(X) = 0 \iff X$ déterministe
$\exists v \; p_v = 1$

3) $H(X) \leq \log_2 N$
N : taille de V

4) $H(X) = \log N \iff$ équiprobabilité
$\forall v \; p_v = \frac{1}{N}$

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

0 1 1 0 1 1 0 1 1 0

1 0 0 1 0 0 1 0 0 1

Soit un entier naturel codé sur 32 bits. L'entropie de ce nombre peut-elle être changée si on :

- inverse tous ses bits ? NON
- lui additionne le nombre 1 ? OUI 0 + 1
- prend l'opposé ? OUI
- fait une permutation circulaire de tous ses bits ? NON

$$\begin{array}{r} 00000 \\ + \quad 1 \\ \hline 00001 \end{array}$$

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soit un entier naturel codé sur 32 bits. L'entropie de ce nombre peut-elle être changée si on :

- inverse tous ses bits ? **non**
- lui additionne le nombre 1 ? **oui**
- prend l'opposé ? **oui**
- fait une permutation circulaire de tous ses bits ? **non**

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

8 lettres ≠ $H(X) \leq \log \cancel{20}$ 8

Considérons la séquence $X =$« HUBERT QUEL HURLUBERLU » (sans les espaces).
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

A] $H(X) = -2.82\,\text{bit}$ non $H(X) \geq 0$

B] $H(X) \geq 8\,\text{bit}$

C] $H(X) \leq 4\,\text{bit}$

D] $H(X) = 3.1\,\text{bit}$

$H(X) \leqslant 3$

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Considérons la séquence $X =$« HUBERT QUEL HURLUBERLU » (sans les espaces).
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

A] $H(X) = -2.82\,\mathrm{bit}$

B] $H(X) \geq 8\,\mathrm{bit}$

*__C]__ $H(X) \leq 4\,\mathrm{bit}$

D] $H(X) = 3.1\,\mathrm{bit}$

Homework : calculez $H(X)$

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soient H_V l'entropie des voyelles d'un jeu de Scrabble et H_C celle des consonnes ; $m = \min(H_V, H_C)$ et $M = \max(H_V, H_C)$.

L'entropie H_L de toutes les lettres de ce jeu de Scrabble vérifie :

A] $\cancel{m \le H_L \le M}$ **B]** $\cancel{H_L = \frac{H_V + H_C}{2}}$ **C]** $m \le H_L \le M + 1$ **D]** $H_L \le M$

$\simeq 10$

$B \Rightarrow A \Rightarrow C$

$D \wedge \neg C \Rightarrow H_L < m$

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soient H_V l'entropie des voyelles d'un jeu de Scrabble et H_C celle des consonnes ;
$m = \min(H_V, H_C)$ et $M = \max(H_V, H_C)$.

L'entropie H_L de toutes les lettres de ce jeu de Scrabble vérifie :

A] $m \leq H_L \leq M$ **B]** $H_L = \frac{H_V + H_C}{2}$ ***C]** $m \leq H_L \leq M + 1$ **D]** $H_L \leq M$

Note :

$$B \Longrightarrow A \Longrightarrow D \quad ; \text{et} \quad \neg C \wedge D \Longrightarrow H_L < m$$

Démonstration que C est vraie ?

$$H_v = -\sum_{\ell \in \text{voyelles}} \hat{p}_\ell \log \hat{p}_\ell \qquad \hat{p}_\ell : \text{proba dans le jeu des voyelles}$$

$$H_c = -\sum_{\ell \in \text{consonnes}} \bar{p}_\ell \log \bar{p}_\ell \qquad \bar{p}_\ell : \text{———— des consonnes}$$

$$-H_L = \sum_{\ell \in \text{lettres}} p_\ell \log p_\ell = \sum_{\ell \in \text{voy.}} p_\ell \log p_\ell + \sum_{\ell \in \text{cons.}} p_\ell \log p_\ell$$

voyelles

$$p_\ell = \frac{n_\ell}{N} = \frac{N_v}{N} \frac{n_\ell}{N_v} = \frac{N_v}{N} \hat{p}_\ell \qquad \hat{p}_\ell = \frac{n_\ell}{N_v}$$

consonnes :

$$p_\ell = \frac{N_c}{N} \bar{p}_\ell$$

$N = \#$ total lettres $\quad n_\ell = \#$ lettre $\ell \quad N_v = \#$ voyelles $\quad N = N_c + N_v$

$$-H_L = \sum_{V} \frac{N_V}{N} \hat{p}_\ell \cdot \log\left(\frac{N_V}{N} \hat{p}_\ell\right) + \sum_{C} \frac{N_C}{N} \hat{p}_\ell \log\left(\frac{N_C}{N} \hat{p}_\ell\right)$$

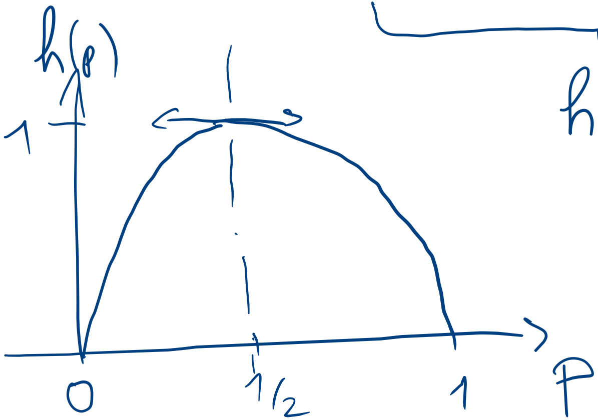
$$= \sum_{\ell \in V} \boxed{\frac{N_V}{N}} \hat{p}_\ell \boxed{\log\left(\frac{N_V}{N}\right)} + \underbrace{\sum_{V} \frac{N_V}{N} \hat{p}_\ell \log \hat{p}_\ell}_{-\frac{N_V}{N} H_V} + \dots$$

$$= \frac{N_V}{N} \log \frac{N_V}{N}$$

$$\frac{N_C}{N} H_C$$

$$\sum_{\ell \in V} \hat{p}_\ell = 1$$

$$\frac{N_v}{N} H_v + \frac{N_c}{N} H_c - \underbrace{\left(\frac{N_v}{N} \log \frac{N_v}{N} + \frac{N_c}{N} \log \frac{N_c}{N} \right)}_{h(p)}$$



$h(p)$: entropie d'une variable binaire de proba p

$$p = \frac{N_v}{N}$$

$$h(p) = -[p \log p + (1-p) \log(1-p)]$$