Information, Calcul et Communication
Compléments de cours

J.-C. Chappelier

EPFL

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2018 Q1.4

$X(mT_e)$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$f_e = 30$ $\quad T_e = \frac{1}{30}$ $\quad f_e T_e = \underline{1}$

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \boxed{a_m}\, \mathrm{sinc}(30\,t - m)$$

où $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ et $a_m = 7\sin(\dfrac{2\pi}{3}m + \dfrac{\pi}{6}) + 3\sin(\dfrac{4\pi}{5}m + \dfrac{\pi}{4}) + 2\sin(\dfrac{2\pi}{6}m)$. $\;7 \; X(mT_e)$

Écrire $f(t)$ comme la somme de trois fonctions sinus :

$X(t)$: f_{max} $\xrightarrow[f_e]{\text{échant.}}$ $X(mT_e)$

$\frac{2\pi}{3} m =$

$\frac{2\pi}{3} f_e T_e m$

$= 2\pi \boxed{\frac{f_e}{3}} \boxed{mT_e}$ $\to t$

! $\boxed{\text{Si } f_e > 2 f_{max}}$ alors

$X_I(t) = X(t) \quad \forall t$

où $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\, \mathrm{sinc}(\boxed{f_e}\, t - m)$

$$\frac{2\pi}{3} m = \left(\frac{2\pi}{3} \frac{1}{T_e}\right) \boxed{m T_e}$$

t

$$X(mTe) \dashrightarrow X(t)$$

$$a \sin(2\pi f \; t + \varphi)$$

$$7\sin\left(2\pi\boxed{\frac{f_e}{3}}t+\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\left(\underbrace{4\pi\frac{f_e}{5}}_{2\pi\boxed{\frac{2f_e}{5}}}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\,2\sin\left(2\pi\boxed{\frac{f_e}{6}}t\right)$$

$f_1=\frac{f_e}{3}<\frac{f_e}{2}$ ✓

$f_2=\frac{2}{5}f_e<\frac{f_e}{2}$ ✓

$f_3=\frac{f_e}{6}<\frac{f_e}{2}$ ✓

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2018 Q1.4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \operatorname{sinc}(30\,t - m)$$

où $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ et $a_m = 7\sin(\dfrac{2\pi}{3}m + \dfrac{\pi}{6}) + 3\sin(\dfrac{4\pi}{5}m + \dfrac{\pi}{4}) + 2\sin(\dfrac{2\pi}{6}m)$.

Écrire $f(t)$ comme la somme de trois fonctions sinus :

Voyons a_m comme les échantillons d'un signal $g(t)$ échantillonné à $f_e = 30$ Hz (le coefficient de t dans le sinc) : c.-à-d. que l'on veut écrire $a_m = g(m\,T_e) = g(\frac{m}{f_e})$, avec donc

$$g(t) = 7\sin(2\pi\,\frac{f_e}{3}\,t + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(2\pi\,\frac{2\,f_e}{5}\,t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(2\pi\,\frac{f_e}{6}\,t)$$

$\frac{f_e}{2}$ étant strictement supérieure à La bande passante de g (qui est $\frac{2f_e}{5}$), g sera reconstruite parfaitement par la formule de reconstruction, et on a donc pour tout t, $f(t) = g(t)$, c.-à-d. :

$$f(t) = 7\sin(20\pi\,t + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(24\pi\,t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(10\pi\,t)$$

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q6

Soit X le signal défini par :

3 15 6 = f_{max} APRES filtrage

$$X(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + \cancel{3\sin(30\pi t + \frac{\pi}{3})} + 2\sin(12\pi t).$$

X est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 12$ Hz, puis échantillonné à une fréquence $f_e = 14$ Hz.

$f_e > 2 f_{max}$?

À partir de ces échantillons, on reconstruit le signal Y en utilisant la formule de reconstruction vue en cours.

oui : $14 > \underbrace{2 \cdot 6}_{12}$

Quelle est la forme mathématique du signal $Y(t)$?

$$Y(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(12\pi t)$$

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q6

Soit X le signal défini par :

$$X(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + 3\sin(30\pi t + \frac{\pi}{3}) + 2\sin(12\pi t).$$

X est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 12$ Hz, puis échantillonné à une fréquence $f_e = 14$ Hz.

À partir de ces échantillons, on reconstruit le signal Y en utilisant la formule de reconstruction vue en cours.

Quelle est la forme mathématique du signal $Y(t)$?

$$Y(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(12\pi t)$$

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q13

Un enfant de vos connaissances veut enregistrer, et envoyer par message, un chant à sa grand-mère.
Fort(e) de vos connaissances en ICC, vous l'aidez à construire une transmission optimale. Sachant que sa voix se situe entre 1000 et 3500 Hz (au dessus il n'y a que du bruit) et que pour des raisons techniques, il n'est pas possible d'acquérir plus que 8000 échantillons par seconde, quelle procédure lui conseillez-vous :

$f_e > 2 f_{max}$

- filtrage (passe-bas) : oui ou non ?
- Si oui :
  - avant ou après échantillonnage ?
  - avec quelle fréquence de coupure ? $f_c = 3501\,Hz \ldots 3999\,Hz$
- À quelle fréquence conseillez-vous d'échantillonner ? Pourquoi ?
- Le chant pourra-t-il être correctement reconstruit à l'arrivée ? Pourquoi ?

Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q13

Un enfant de vos connaissances veut enregistrer, et envoyer par message, un chant à sa grand-mère.
Fort(e) de vos connaissances en ICC, vous l'aidez à construire une transmission optimale. Sachant que sa voix se situe entre 1000 et 3500 Hz (au dessus il n'y a que du bruit) et que pour des raisons techniques, il n'est pas possible d'acquérir plus que 8000 échantillons par seconde, quelle procédure lui conseillez-vous :

- filtrage (passe-bas) : **oui** (nécessaire si l'on ne veut pas avoir de « repliement de spectre » du bruit)
- Si oui :
  - avant ou après échantillonnage ? **avant**
  - avec quelle fréquence de coupure ? **un peu au dessus (mais assez proche) de 3500 Hz**
- À quelle fréquence conseillez-vous d'échantillonner ? Pourquoi ? **un peu au dessus de 2 fois la fréquence de coupure, ou, si possible à 8000 Hz**
- Le chant pourra-t-il être correctement reconstruit à l'arrivée ? Pourquoi ? **oui tant que les choix faits respectent** $f_e > 2f_c$

Leçons II.1 et II.2 – Mix Examens 2015–2016

$X_I(mT_e) = X(mT_e)$ >0

Soit $X(t)$ un signal quelconque défini sur $\mathbb{R}$, de bande passante $f_{\max}$, et soit $X_I(t)$ sa reconstruction (suivant la formule du cours) après échantillonnage à une fréquence $f_e = 1/T_e$.

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

A] $\forall f_e \geq 3f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$ $\quad \forall f_e > 2f_{max}\ \forall t \in \mathbb{R} \ldots$

B] $\forall f_e\, 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

C] $\forall f_e\, 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) \neq X(t)$ FAUX $\quad \neg(\forall t\ P(t))$

D] $\forall f_e\, 0 < f_e < 2f_{\max} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad X_I(nT_e) = X(nT_e)$ $\quad \equiv \exists t\ \neg P(t)$

E] Si $f_e = 2f_{\max}$, il est possible que $\forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

Leçons II.1 et II.2 – Mix Examens 2015–2016

Soit $X(t)$ un signal quelconque défini sur $\mathbb{R}$, de bande passante $f_{\max}$, et soit $X_I(t)$ sa reconstruction (suivant la formule du cours) après échantillonnage à une fréquence $f_e = 1/T_e$.
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

- *A] $\forall f_e \geq 3f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$
- B] $\forall f_e \, 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$
- C] $\forall f_e \, 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) \neq X(t)$
- *D] $\forall f_e \, 0 < f_e < 2f_{\max} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad X_I(nT_e) = X(nT_e)$
- *E] Si $f_e = 2f_{\max}$, il est possible que $\forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

Leçon II.3 (entropie) – Points clés

- compression sans perte / compression avec perte
- définition (formelle) de l'entropie
- (quatre) propriétés de l'entropie
- algorithme (de compression) de Shannon-Fano

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

IL PLEUT

n : 0 1 0 1 1 0 1

Soit un entier naturel codé sur 32 bits. L'entropie de ce nombre peut-elle être changée si on :

- inverse tous ses bits ? non
- lui additionne le nombre 1 ? oui
- prend l'opposé ? oui
- fait une permutation circulaire de tous ses bits ? non

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soit un entier naturel codé sur 32 bits. L'entropie de ce nombre peut-elle être changée si on :

- inverse tous ses bits ? **non**
- lui additionne le nombre 1 ? **oui**
- prend l'opposé ? **oui**
- fait une permutation circulaire de tous ses bits ? **non**

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

8 lettres

Considérons la séquence $X =$« $\overbrace{\text{HUBERT QUEL HURLUBERLU}}$ » (sans les espaces).
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

A] $H(X) = -2.82$ bit NON

B] $H(X) \geq 8$ bit NON

C] $H(X) \leq 4$ bit OUI

D] $H(X) = 3.1$ bit NON

$H(X) \leq \log(\underbrace{\text{nb valeurs}}_{8})$

$\Rightarrow H(X) \leq 3$ bit

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

H U B E R T Q L

20 ← 2 5 2 3 3 1 1 3

Considérons la séquence $X =$« HUBERT QUEL HURLUBERLU » (sans les espaces). Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

A] $H(X) = -2.82\,\text{bit}$

B] $H(X) \geq 8\,\text{bit}$

***C]** $H(X) \leq 4\,\text{bit}$

D] $H(X) = 3.1\,\text{bit}$

Homework : calculez $H(X)$ 2.94

$\frac{57}{20}$: 2.85

$$\overbrace{\log_2(20) - \frac{1}{20}\left(5\log_2 5 + 9\log_2 3 + 4\log_2 2\right)}^{2.82}$$

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soient H_V l'entropie des voyelles d'un jeu de Scrabble et H_C celle des consonnes ; $m = \min(H_V, H_C)$ et $M = \max(H_V, H_C)$.

L'entropie H_L de toutes les lettres de ce jeu de Scrabble vérifie :

A] $\cancel{m \leq H_L \leq M}$ **B]** $\cancel{H_L = \frac{H_V + H_C}{2}}$ **C]** $m \leq H_L \leq M + 1$ **D]** $\cancel{H_L \leq M}$

Soit $H_L < m$

~~Soit $H_L > M+1$~~

Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soient H_V l'entropie des voyelles d'un jeu de Scrabble et H_C celle des consonnes ;
$m = \min(H_V, H_C)$ et $M = \max(H_V, H_C)$.
L'entropie H_L de toutes les lettres de ce jeu de Scrabble vérifie :

A] $m \leq H_L \leq M$ **B]** $H_L = \frac{H_V + H_C}{2}$ *__C]__ $m \leq H_L \leq M + 1$ **D]** $H_L \leq M$

Démonstration ?

$$H_L = -\sum_{\ell\in L} p_\ell \log p_\ell = -\left(\sum_{\ell\in V} p_\ell \log p_\ell + \sum_{\ell\in C} p_\ell \log p_\ell\right)$$

prop. voyelles

$$H_V = -\sum_{v\in V} p_v \log p_v \qquad p_v = \frac{n_v}{N_V} = \boxed{\frac{N}{N_V}}\,\overbrace{\boxed{\frac{n_v}{N}}}^{p_\ell} \qquad N_V = \#\text{voyelles}$$

$$H_C = -\sum_{c\in C} p_c \log p_c \qquad p_c = \frac{n_c}{N_c} = \frac{N}{N_C}\,\underbrace{\boxed{\frac{n_c}{N}}}_{p_\ell} \qquad N_C = \#\text{conson.}$$

$$p_\ell = \frac{n_\ell}{N} = \overbrace{\frac{N_V}{N}\cdot p_v}^{\text{pour } \ell\in V} \qquad N = \#\text{lettre} = N_v + N_c$$

$$H_L = -\left(\sum_{\ell\in V} \underbrace{\frac{N_V}{N} p_v}_{p_\ell} \log\left(\frac{N_V}{N} p_v\right) + \sum_{\ell\in C} \frac{N_C}{N} \cdots\right.$$

$$\log\left(\frac{N_v}{N}\, p_v\right) = \log\frac{N_v}{N} + \log p_v$$

$$\boxed{\frac{N_v}{N}}\log\frac{N_v}{N} + \frac{N_c}{N}\log\frac{N_c}{N} \longrightarrow \text{entropie du choix } V \text{ ou } C$$

↳ P de choisir le sac voyelle

X binaire de proba p

$\leftrightarrow$ entropie : $h(p)$

min : 0

max : 1