- Si $\exists n \in \mathbb{N}^*$, tel que $f(x_n) = c$ dans ce cas, $\bar{x} = x_n$ et on a terminé.
- Sinon on a définit 2 suites $\begin{cases} (a_n)_{n\geq 1} \text{ croissante, majorée par } b. \\ (b_n)_{n\geq 1} \text{ décroissante, minorée par } a. \end{cases}$

- De plus $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ (par récurrence) donc $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite $\ell \in [a,b]$. fin 7/11

- On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq c \text{ car } f(a_n) \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\ell) \text{ car } f \text{ est continue} \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq c \text{ car } f(b_n) \geq c, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\ell) \text{ car } f \text{ est continue} \end{cases}$

On a donc $c \leq f(\ell) \leq c$ donc $f(\ell) = c$.
En posant $\bar{x} = \ell$, on a bien $\bar{x} \in [a,b]$ et $f(\bar{x}) = c$. ■

Thm.3 (synthèse de Thm.1 et Thm.2). Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue $(a,b \in \mathbb{R}, a<b)$ alors $\mathrm{Im}(f) = [\min f, \max f]$

En particulier : "l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné."

Preuve : Par le Thm 1. $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que $\begin{cases} f(c_1) = \min f \\ \text{et } f(c_2) = \max f \end{cases}$

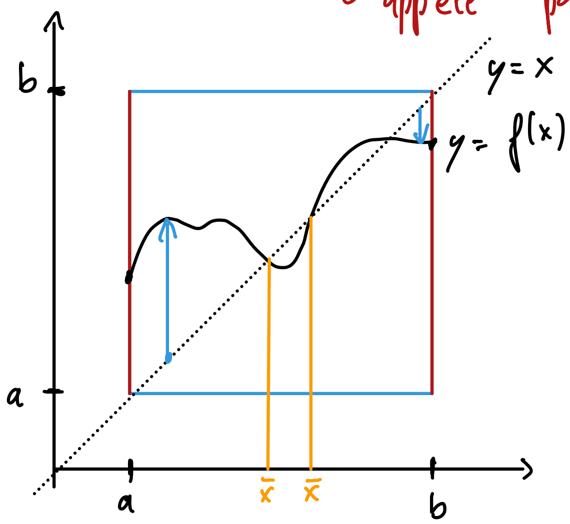
On en déduit $\mathrm{Im}(f) \subset [\min f, \max f]$.
Pour l'inclusion réciproque :

$$[\min f, \max f] = [f(c_1), f(c_2)] \subset \mathrm{Im}\Big(\underbrace{f|_{[c_1,c_2]}}_{f \text{ restreinte à } [c_1,c_2] \text{ (ou } [c_2,c_1] \text{ si } c_2 \leq c_1)}\Big) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Ainsi $\mathrm{Im}(f) = [\min f, \max f]$ ■

Conséquence du Thm. 2 (Thm des valeurs intermédiaires) : existence de points fixes.

Prop : Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue.
Alors il existe $\bar{x} \in [a,b]$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.
appelé "point fixe" de f.



Preuve : Soit $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[a,b]$.

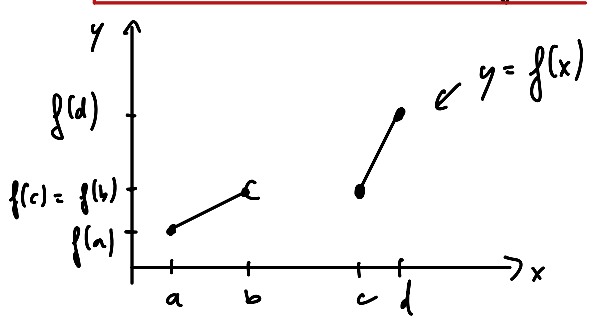
On a $\begin{cases} f(a) \geqslant a & \text{donc } g(a) \geqslant 0 \\ f(b) \leqslant b & \text{donc } g(b) \leqslant 0 \end{cases}$

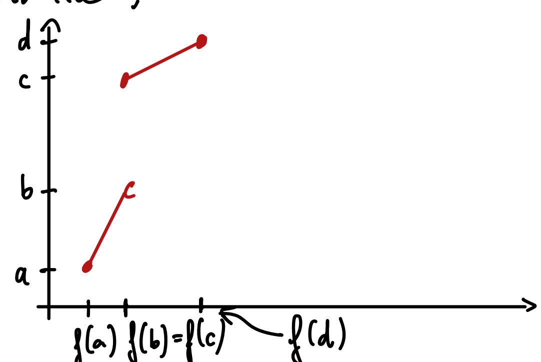
Donc par le TVI (Thm 2), $\exists\, \bar{x} \in [a,b]$ tel que $g(\bar{x}) = 0$ donc $f(\bar{x}) = \bar{x}$. ∎

5.8 Fonctions réciproques de fonctions continues

Rappel : Si $f : D \to \mathbb{R}$ est injective
Alors $\tilde{f} : D \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective.

Thm : La réciproque d'une fonction continue injective (existe, et) est continue sur l'image de tout intervalle.





$f : [a, b[\cup [c, d] \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective et continue

f^{-1} discontinue en $f(b) = f(c)$

Le Thm ne s'applique pas à f^{-1} car $D(f)$ n'est pas un intervalle.

- Par contre $f|_{[a,b[}$ admet une réciproque continue (de même pour $f|_{[c,d]}$).

Chapitre 6 : Calcul différentiel

Dans ce chapitre $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[\subset D$ avec $a<b$.

6.1 Définition

Def (dérivabilité). Une fonction f est dérivable en x_0 ssi :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et } \in \mathbb{R}$$

Remarque : En posant $x = x_0 + h$, on a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

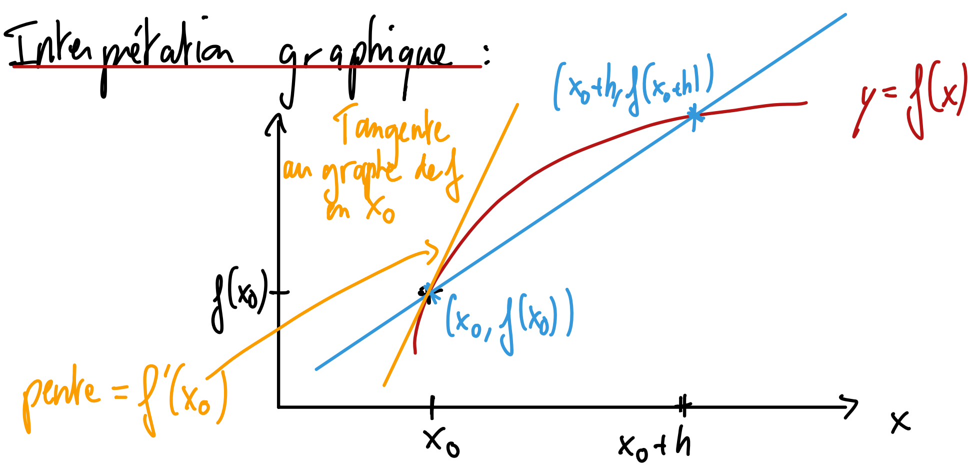
Cette limite est appelée la dérivée de f en x_0, et est notée $f'(x_0)$.

Exemple : Soit $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$, on a

déjà vue.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-\sin(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Interprétation graphique :



Droite bleue :

$$y = f(x_0) + (x-x_0)\cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\downarrow\, h\to 0}$$

Droite jaune :

$$y = f(x_0) + (x-x_0)\, f'(x_0)$$

Def (différentiabilité). Une fonction est différentiable en x_0 ssi

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \overbrace{f(x_0) + \alpha\cdot(x-x_0)}^{\text{fct° affine}} + \overbrace{r(x)}^{\text{reste}}$$

où $r: D \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0$

Remarque : En posant $R(x) = \dfrac{r(x)}{x-x_0}$, on a que f est différentiable en x_0 ssi

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = f(x_0) + \alpha\cdot(x-x_0) + (x-x_0)\cdot R(x)$$

$$\text{où } R : D \to \mathbb{R} \text{ vérifie } \lim_{x\to x_0} R(x) = 0.$$

Thm : f est dérivable en x_0 $\iff$ f est différentiable en x_0.
Et alors on a $\alpha = f'(x_0)$.

Preuve : f est différentiable en x_0 avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\iff f(x) = f(x_0) + \alpha\cdot(x-x_0) + r(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0.$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-\alpha\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \alpha \right) = 0$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha$$

$$\iff f \text{ dérivable en } x_0 \text{ avec } f'(x_0) = \alpha. \qquad \blacksquare$$

Def (fonction dérivée). On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[\subset D$ ssi f est dérivable en tout point $x_0 \in]a,b[$. La fonction :

$$f' : \left| \begin{array}{ccc}]a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{array} \right.$$

est la dérivée de f.

Def (dérivée d'ordre n). Si la fonction f' elle-même est dérivable sur $]a,b[$ alors on peut définir la fonction f'' appelée dérivée seconde de f par :

$$f'' : \left| \begin{array}{l}]a,b[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f')'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \end{array} \right. .$$

Par récurrence, si la n-ième dérivée de f est définie et dérivable sur $]a,b[$ on définit la fonction $f^{(n)}$ par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$, qui est appelée la dérivée n-ième de f.

Interprétation physique : si $f(t)$ donne la position d'un véhicule sur une route rectiligne au temps t, alors :

- $f'(t)$ est la vitesse au temps t.
- $f''(t)$ est l'accélération
- $f'''(t)$ est l'à-coup.

6.2 Dérivabilité implique continuité

Thm : Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Preuve : Si f est dérivable en x_0 alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Ainsi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ∎

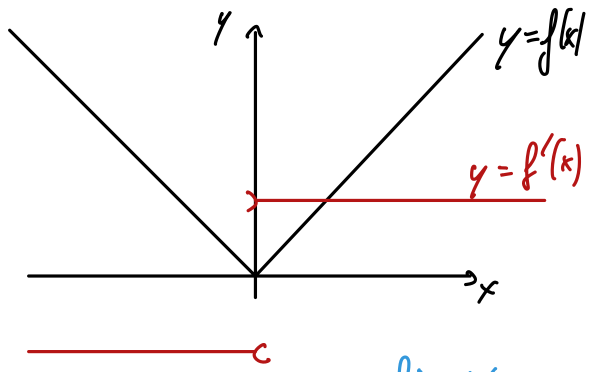
⚠ La réciproque est fausse.

Contre-exemple à la réciproque : valeur absolue $f(x) = |x|$, en $x_0 = 0$

- f est continue en $x_0 = 0$, $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$

- mais f n'est pas dérivable en 0 :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1 \\ &\lim_{x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1 \end{aligned}\right\} \text{donc } \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} \text{ n'existe pas}$$



fin 11/11