Corrigé Série 09 : loi de Kepler et mouvement relatif

1 Vitesse de libération

On suppose que la seule force appliquée à l'objet est la force de gravitation liée à la présence de l'astre (de la Terre). La vitesse de libération est la vitesse initiale nécessaire au corps pour rejoindre « un point infiniment éloigné » de l'astre de l'astre avec une vitesse finale nulle.
Comme la force de gravitation est conservative, l'énergie mécanique de l'objet est conservée. A un instant donné, cette énergie a pour expression :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}^{\text{grav.}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{r} + C\,,$$

où m est la masse du corps, v est la vitesse de ce dernier, et r est la distance qui sépare le corps du centre de masse de l'astre. L'énergie potentielle de gravitation est définie à une constante arbitraire C près.
Ecrivons l'énergie mécanique que possède le corps à deux instants :

- Au moment où le corps quitte la surface de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_0$ (de norme $v_0 = ||\vec{v}_0||$) et se trouve à une distance $r = R$ du centre de masse de l'astre (R est le rayon de l'astre).
- Au moment où le corps est très éloigné de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_\infty \cong \vec{0}$ et se trouve à une distance $r \to \infty$ du centre de masse de l'astre.

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} + C}_{E_{\text{méc.}}\text{ à la surface de l'astre}} &= \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2 - \lim_{r\to\infty} G\frac{mM_{\text{astre}}}{r} + C}_{E_{\text{méc.}}\text{ très loin de l'astre}} \\
&= 0 + 0 + C\,.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} = 0\,,$$

et la vitesse initiale v_0 a pour expression :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2M_{\text{astre}}G}{R}}\,.$$

Numériquement, nous obtenons, dans le cas de la Terre,

$$\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{\frac{2M_{\text{T}}G}{R_{\text{T}}}} \\
&\cong \sqrt{\frac{2\cdot 5.9742\cdot 10^{24}\cdot 6.6732\cdot 10^{-11}}{6.3710\cdot 10^{6}}} \cong 1.1187\cdot 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cong 11\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

On note que la vitesse v_0 ne dépend pas de la masse du corps. D'autre part, nous avons obtenu une vitesse de libération scalaire (et non pas vectorielle). Tout corps possédant cette vitesse v_0 est a priori susceptible d'échapper à l'attraction gravitationnelle de la Terre, et ce, quelle que soit la direction de sa vitesse initiale (pour autant évidemment que cette vitesse ne pointe pas en direction de l'astre). En pratique, il serait nécessaire d'affiner le calcul en tenant compte du frottement entre l'objet et l'atmosphère (traînée).

2 Voyage vers Mars

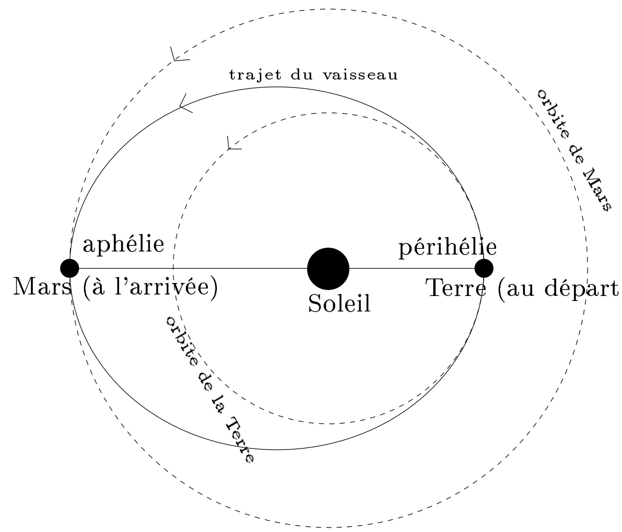
a) La période de révolution de Mars se calcule en utilisant la troisième loi de Kepler

$$\frac{(\text{période})^2}{(\text{grand axe})^3} = \text{constante}.$$

Soit T_T et T_M les périodes de révolution de la Terre et de Mars respectivement, on a

$$\frac{T_T^2}{(2R_T)^3} = \frac{T_M^2}{(2R_M)^3}$$

$$\Rightarrow \quad T_M = T_T \left(\frac{R_M}{R_T}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1.874 \text{ années.}$$



On a utilisé le fait que les orbites sont circulaires et donc le grand axe de l'ellipse est égal au diamètre du cercle.

b) La vitesse de la Terre sur son orbite est donnée par

$$v_T = \Omega_T R_T = \frac{2\pi}{T_T} R_T = 2\pi \frac{1 \text{ u.a.}}{1 \text{ année}} = \frac{2\pi \times 149.6 \times 10^9}{365 \times 24 \times 3600} \simeq 29.8 \times 10^3 \text{ m/s} = 107300 \text{ km/h.}$$

Similairement, pour Mars

$$v_M = \Omega_M R_M = \frac{2\pi}{T_M} R_M \simeq 24.2 \times 10^3 \text{ m/s} = 87120 \text{ km/h.}$$

c) On calcule la durée du voyage en utilisant à nouveau la troisième loi de Kepler

$$\frac{(T_T)^2}{(2R_T)^3} = \frac{(T_{\text{vaisseau}})^2}{(A)^3} \ ,$$

où $A = R_T + R_M$ est le grand axe de l'ellipse. La période du vaisseau est donc donnée par

$$T_{\text{vaisseau}} = T_T \Big(\frac{R_T + R_M}{2R_T}\Big)^{\frac{3}{2}} \simeq 1.414 \text{ années.}$$

Pour atteindre Mars, on parcourra la moitié de cette orbite. La durée du voyage T_{voyage} sera donc égale à 0.707 années, c'est-à-dire 258 jours.

d) Pour déterminer les vitesses au départ $v_{\text{dép}}$ et à l'arrivée v_{arr}, nous avons besoin de deux équations. La première est la conservation du moment cinétique du vaisseau par rapport au Soleil entre le point de départ et le point d'arrivée (en effet, par hypothèse le vaisseau ne subit que la force d'attraction du Soleil, qui est centrale). Ceci donne :

$$R_T m v_{\text{dép}} = R_M m v_{\text{arr}}, \tag{1}$$

où m est la masse du vaisseau. La deuxième équation est la conservation de l'énergie mécanique du vaisseau entre le point de départ et le point d'arrivée :

$$\frac{1}{2} m v_{\text{dép}}^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{1}{2} m v_{\text{arr}}^2 - \frac{GMm}{R_M},$$

que l'on récrit

$$\frac{1}{2}\left(v_{\text{dép}}^2 - v_{\text{arr}}^2\right) = GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right), \tag{2}$$

où M est la masse du Soleil.

— Vitesse de départ : En combinant les équations (1) et (2), on trouve

$$\frac{1}{2} v_{\text{dép}}^2 \left(1 - \frac{R_T^2}{R_M^2}\right) = GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right),$$

qui se récrit, en utilisant $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{1}{2} v_{\text{dép}}^2 R_T^2 \left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_M}\right) = GM. \tag{3}$$

On remarque que cette équation est aussi valable pour la Terre, sur son orbite circulaire :

$$\frac{1}{2} v_T^2 R_T^2 \frac{2}{R_T} = v_T^2 R_T = GM. \tag{4}$$

En combinant (3) et (4) on trouve

$$v_{\text{dép}} = v_T \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R_T}{R_M}}}. \tag{5}$$

Remarque : On peut également trouver l'équation (4) après projection de la deuxième loi de Newton appliquée au système "Terre" soumis à la force gravitationnelle exercée par le Soleil :

$$M_T \frac{v_T^2}{R_T} = \frac{G M_T M}{R_T^2},$$

où M_T est la masse de la Terre.

— Vitesse d'arrivée : On fait le même raisonnement que pour la vitesse de départ. On combine les équations (1) et (2) pour exprimer la vitesse d'arrivée :

$$\frac{1}{2} v_{\text{arr}}^2 R_M^2 \left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_M}\right) = GM. \tag{6}$$

L'équation (6) est valable pour Mars sur son orbite circulaire, on trouve donc

$$\frac{1}{2}v_M^2 R_M^2 \frac{2}{R_M} = v_M^2 R_M = GM. \tag{7}$$

On combine (6) et (7) pour obtenir :

$$v_{\mathrm{arr}} = v_M \sqrt{\frac{2}{1+\frac{R_M}{R_T}}}. \tag{8}$$

— La vitesse à donner au vaisseau au départ *par rapport à la Terre* est la différence entre la vitesse orbitale v_{dep} et la vitesse de la Terre v_T :

$$\Delta v_{\mathrm{dép}} = v_{\mathrm{dép}} - v_T = v_T \left(\sqrt{\frac{2}{1+\frac{R_T}{R_M}}} - 1 \right).$$

De même, à son arrivée sur Mars, il faudra modifier la vitesse du vaisseau de

$$\Delta v_{\mathrm{arr}} = v_M - v_{\mathrm{arr}} = v_M \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\frac{R_M}{R_T}}} \right).$$

Numériquement, la vitesse qu'il faut donner au vaisseau au départ vaut

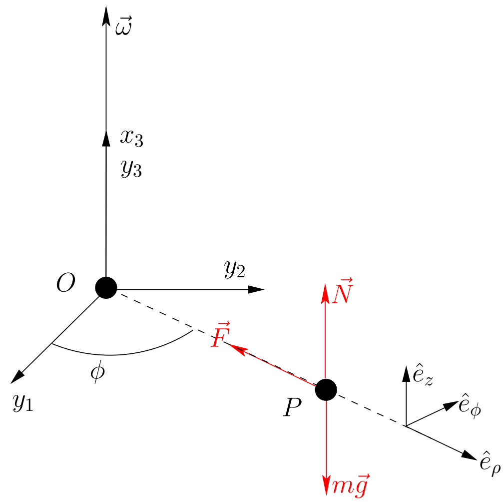
$$\Delta v_{\mathrm{dép}} = v_{\mathrm{dép}} - v_T \simeq +2.928 \text{ km/s}.$$

Et à l'arrivée sur Mars, il faudra modifier sa vitesse de

$$\Delta v_{\mathrm{arr}} = v_M - v_{arr} \simeq +2.636 \text{ km/s}.$$

On remarque que dans les deux cas, le vaisseau doit être accéléré !

3 Coureur sur carrousel



On définit, dans la référentiel absolu lié à la Terre, un repère fixe $Ox_1x_2x_3$, où O est le centre du carrousel et où l'axe x_3 est vertical vers le haut.
Le référentiel relatif du carrousel tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\hat{x}_3$ relativement au référentiel de la Terre. On définit un repère $Oy_1y_2y_3$ fixe dans le référentiel du carrousel, avec l'axe y_3 parallèle à x_3. Dans ce référentiel, on choisit les coordonnées cylindriques pour déterminer la position du coureur.
Dans le référentiel tournant, la position du coureur est $\overrightarrow{OP} = R\hat{e}_\rho$, la vitesse relative du coureur est $\vec{v}_{\text{rel}} = v\hat{e}_\phi$, et l'accélération relative est $\vec{a}_{\text{rel}} = \frac{d\vec{v}_{\text{rel}}}{dt} = v\dot{\hat{e}}_\phi = v(\Omega\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\phi)$, où $\Omega\hat{e}_z$ est la vitesse angulaire du coureur dans le référentiel tournant. Comme $v = R\Omega$, on a

$$\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{v^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{9}$$

L'accélération centripète $\vec{a}_{\text{cen}}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a}_{\text{Cor}}$ sont

$$\vec{a}_{\text{cen}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = \omega\hat{e}_z \wedge R\omega\hat{e}_\phi = -R\omega^2\hat{e}_\rho\,, \tag{10}$$

et

$$\vec{a}_{\text{Cor}} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\omega\hat{e}_z \wedge v\hat{e}_\phi = -2\omega v\hat{e}_\rho\,. \tag{11}$$

L'accélération absolue du coureur dans le référentiel fixe est donc

$$\vec{a}_{\text{abs}} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{cen}} + \vec{a}_{\text{Cor}} = -\left(\frac{v^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega v\right)\hat{e}_\rho = -\frac{(v+R\omega)^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{12}$$

Les forces qui s'exercent sur le coureur sont :
- le poids $\vec{P} = -mg\hat{e}_z$ du coureur, perpendiculaire au plan du carrousel.
- la force de soutien $\vec{N} = N\hat{e}_z$ normale au carrousel.
- la force $\vec{F}$ parallèle au sol, due au frottement statique des pieds du coureur sur le carrousel.

On applique la deuxième loi de Newton

$$\Sigma F^{\text{ext.}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}_{\text{abs}} \tag{13}$$

et on trouve que la force $\vec{F}$ est dirigée selon $\hat{e}_\rho$:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\text{abs}} = -m\frac{(v+R\omega)^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{14}$$

4 Le rameur

Le problème est à une seule dimension. On considère le référentiel de la terre (absolu) lié à un repère Ox, où O est un point de la rive du fleuve et l'axe x dirigé dans le sens du courant, ainsi que le référentiel du fleuve (relatif) lié à un repère Ay, où A est un point du fleuve et l'axe y est parallèle à x.
La vitesse absolue du fleuve par rapport à Ox est v_f, et la norme de la vitesse relative du rameur par rapport au fleuve est v_r. La bouteille, une fois détachée du bateau, a une vitesse nulle relativement au fleuve.
De manière générale, la loi de transformation des vitesses pour un point P est

$$\vec{v}_P = \vec{v'}_P + \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}\,, \tag{15}$$

où $\vec{v}_P$ est la vitesse absolue, $\vec{v'}_P$ la vitesse relative, $\vec{v}_A$ la vitesse absolue du point A, et $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire. Dans ce problème à une dimension, $\omega = 0$, $v'_P = \pm v_r$, et $v_A = v_f$, et donc

$$v_P = \pm v_r + v_f\,. \tag{16}$$

Quand le rameur remonte le courant, sa vitesse relative est $-v_r$, et sa vitesse absolue est $v_P = -v_r + v_f$. La distance parcourue durant un temps t_1 est donc $x_{1,\text{ram.}} = (-v_r + v_f)t_1$. Remarque : $x_{1,\text{ram.}}$ est négatif si v_P est négatif.
Quand le rameur suit le courant, sa vitesse relative est $+v_r$, et sa vitesse absolue est $v_P = +v_r + v_f$. La distance parcourue durant un temps t_2 est donc $x_{2,\text{ram.}} = (v_r + v_f)t_2$.
La position absolue $x_{\text{ram.}}$ du rameur après un temps $t_1 + t_2$ est donc

$$x_{\text{ram.}}(t_1 + t_2) = x_{1,\text{ram.}} + x_{2,\text{ram.}} = (-v_r + v_f)t_1 + (v_r + v_f)t_2 = v_r(t_2 - t_1) + v_f(t_1 + t_2)\,. \tag{17}$$

La bouteille a une vitesse relative nulle, et donc sa vitesse absolue est égale à la vitesse v_f du fleuve. Après un temps $t_1 + t_2$, sa position est donc

$$x_{\text{bout.}}(t_1 + t_2) = v_f(t_1 + t_2)\,. \tag{18}$$

Puisque après le temps t_1+t_2 le rameur et la bouteille ont la même coordonnée absolue ($x_{\text{ram.}} = x_{\text{bout.}} = x$), on peut égaliser les équations (17) et (18). On en déduit que $t_1 = t_2 \equiv t$. En substituant ce résultat dans l'équation (18), on trouve

$$x = v_f 2t \Rightarrow v_f = \frac{x}{2t}\,. \tag{19}$$

Numériquement, on obtient

$$v_f = \frac{1 \text{ km}}{2 \text{ heures}} = 0.5 \text{ km/h}\,.$$

Solution alternative :
Plaçons-nous dans un référentiel lié à la bouteille (ou au fleuve). Dans ce cas, tout se passe comme si l'on se trouvait sur un lac (sans courant). La vitesse du rameur dans ce référentiel est v_r et ne dépend pas de la direction dans laquelle il se déplace (rappelons-nous que tout se passe comme si c'était un lac !). Le rameur s'éloigne donc de la bouteille pendant une heure. Il constate alors la perte et revient en arrière. Il doit donc à nouveau ramer pendant une heure pour rattraper la bouteille, qui n'a pas bougé dans notre référentiel !
Donc deux heures se seront écoulées entre le moment où la bouteille se détache et le moment où le rameur la récupère. Si dans un référentiel lié à la rive (ou au pont) la bouteille a parcouru 1 km, c'est donc que sa vitesse (égale à celle du fleuve) est de 0.5 km/h.