Def (prolongement par continuité) : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$, $D =]a,b[\setminus \{x_0\}$

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $g : \left| \begin{array}{l}]a,b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array} \right.$

est appelé le prolongement par continuité de f en x_0, et g est continue en x_0.

fin 04/11

Définition équivalente de la continuité "avec ε et δ"

Thm : Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D(f)$ tel que $\exists r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset D(f)$.
On a que f est continue en x_0 ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D(f), \; \left(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \right)$$

Rmq : il s'agit de la définition de la limite "avec ε et δ" où la limite ℓ est remplacée par $f(x_0)$ (on donc peut enlever l'inégalité $0 < |x - x_0|$)

Thm (composition de fonctions). Soient $f : D(f) \to \mathbb{R}$ et $g : D(g) \to \mathbb{R}$ telles que $\mathrm{Im}(f) \subset D(g)$. On a $g \circ f : D(f) \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in D(f)$. Si :

- f est continue en x_0, et
- g est continue en $f(x_0)$

Alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Contre-exemple (ne satisfaisant pas les hypothèses).

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

prolongement par continuité

avec $D(g) = D(f) = \mathbb{R}$. Comportement de $f \circ g$ en $x_0 = 0$?

- On a $-x \leqslant g(x) \leqslant x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc par le Thm. des gendarmes on a $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0.

- On a $\lim\limits_{y \to g(0)=0} f(y) = 1 \neq f(g(0)) = f(0) = 0$

Donc f n'est pas continue en $0 = g(0)$ donc le Thm. ne s'applique pas.

- Par ailleurs, on a :

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(0) = 0$$

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} f(g(\tilde{x}_n)) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

Donc $f \circ g$ n'admet pas de limite en 0, en particulier $f \circ g$ n'est pas continue en 0.

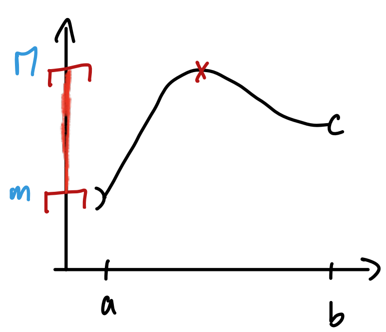
5.7 Propriétés globales des fonctions continues

5.7 1er cas : fonctions continues sur un intervalle ouvert

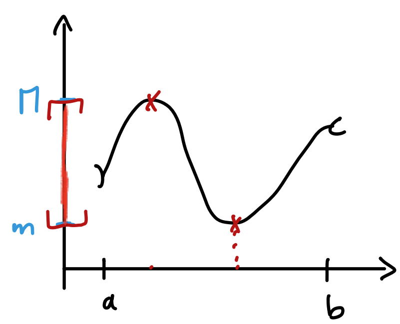
Def : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$. On dit que f est continue sur $]a, b[$ si f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$

Thm : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$. Alors $\text{Im}(f)$ est un intervalle (peut être ouvert, fermé ou semi-ouvert).

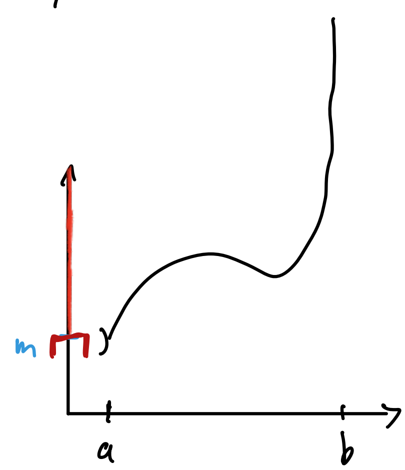
(se déduit du Thm. des valeurs intermédiaires plus bas)



f continue
$\text{Im}(f) =]m, M]$

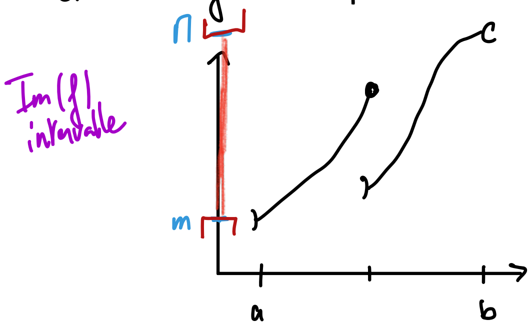


f continue
$\text{Im}(f) = [m, M]$

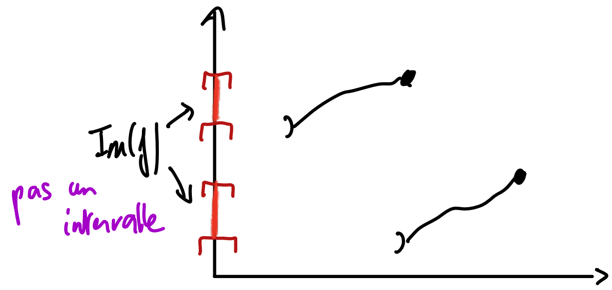


f continue
$\text{Im}(f) =]m, +\infty[$

Quand f n'est pas continue tous les comportements sont possibles :



f discontinue



f discontinue

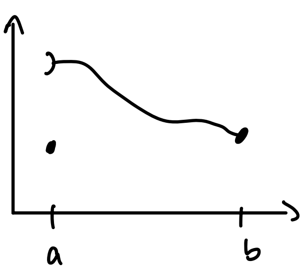
5.7.2 2ème cas : fonctions continues sur un intervalle fermé et borné

Def : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que :

- f est continue à droite en $x_0 \in [a, b[$ si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue à gauche en $x_0 \in]a, b]$ si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

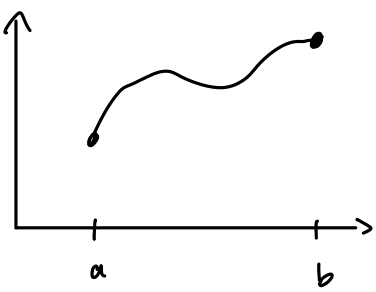
Def : On dit que f est continue sur $[a,b]$ ssi :

- f est continue sur $]a,b[$.
- f est continue à droite en a .
- f est continue à gauche en b .



continue sur $]a,b]$

mais pas continue sur $[a,b]$



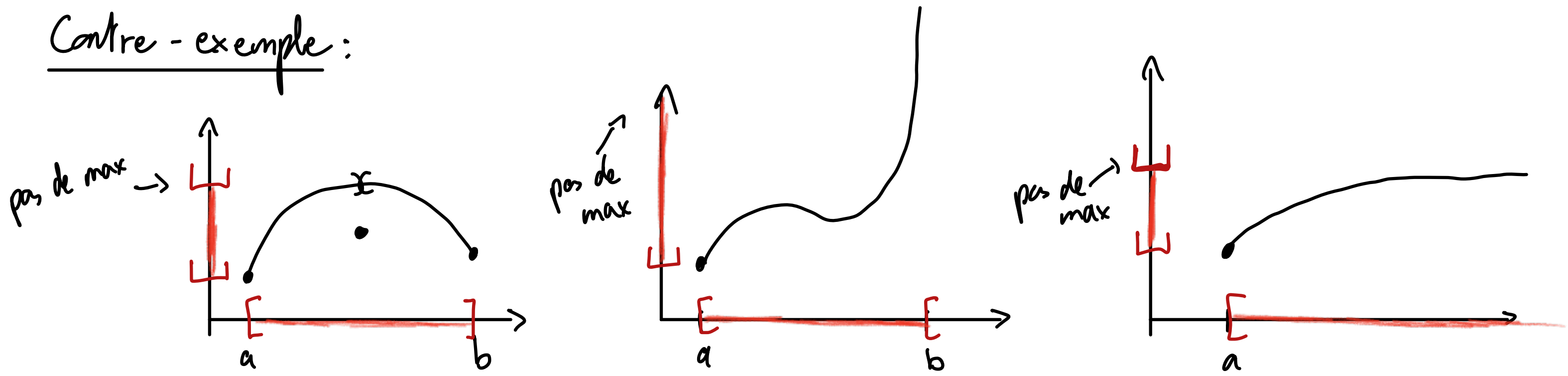
continue sur $[a,b]$.

Thm 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Alors f admet un minimum et un maximum, c'est-à-dire que

$$\exists\, c, C \in [a,b] \text{ tels que } \quad f(c) \leq f(x) \leq f(C),\ \forall x \in [a,b].$$

Notation : on note
$$\begin{cases} \min f \equiv \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \min \operatorname{Im}(f) \\ \max f \equiv \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \max \operatorname{Im}(f) \end{cases}.$$

Contre-exemple :



f discontinue — $[a, b[$ pas fermé — $[a, +\infty[$ pas borné.

Preuve : $M = \sup \{ f(x) \,;\, x \in [a,b] \} = \sup \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R} \cup \underbrace{\{+\infty\}}_{\text{ne peut pas être exclu a priori}}$

On veut trouver $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = M$.

- Il existe une suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,b]$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$ $(*)$ (propriétés du sup, détails ci-dessous).

- Par Bolzano-Weierstrass (x_n) admet une sous-suite $(\tilde{x}_n)$ qui converge donc $\exists c \in [a,b]$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = c$.

- On a $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \begin{cases} M & \text{car } (f(\tilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une sous-suite de } (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ f(c) & \text{par continuité de } f \text{ en } c. \end{cases}$

- Donc $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M < +\infty$, donc M est un maximum.
- La démonstration est analogue pour le minimum. ∎

Détails pour $(*)$: pour le cas où $M \neq +\infty$
$M = \sup A$ avec $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ t.q $M - \varepsilon \leq a \leq M \Rightarrow |a - M| \leq \varepsilon$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a $\exists a_n \in A$ tel que $|a_n - M| \leq \frac{1}{n}$

$\rightarrow$ Dans le contexte de la preuve ci-dessus : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et alors $\exists x_n \in [a,b]$ t.q $|f(x_n) - M| \leq \frac{1}{n}$.

Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

(adapter le raisonnement si $M = +\infty$)

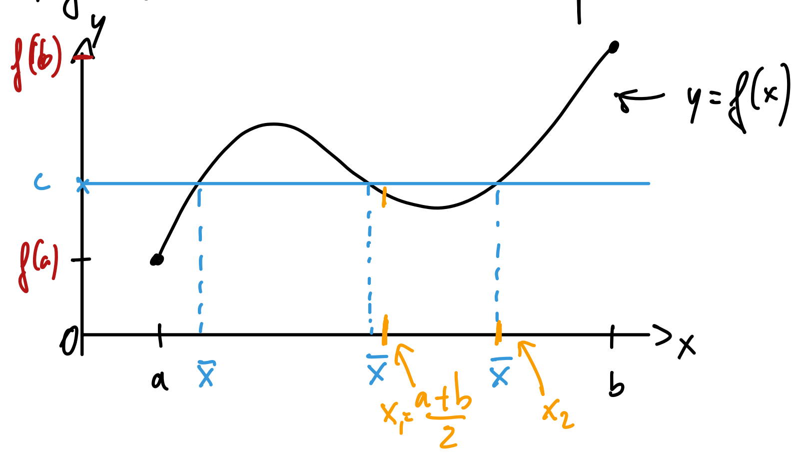
Thm 2 : Thm. des valeurs intermédiaires (TVI). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$) une fonction continue. Alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ c'est-à-dire :

- si $f(a) \leq f(b)$ alors $[f(a), f(b)] \subset \mathrm{Im}(f)$
- si $f(b) \leq f(a)$ alors $[f(b), f(a)] \subset \mathrm{Im}(f)$.

<u>Preuve</u> : Supposons $f(a) \leq f(b)$ (l'autre cas se traite de façon analogue).
Soit $c \in [f(a), f(b)]$. Montrons que $\exists \bar{x} \in [a,b]$ tel que $f(\bar{x}) = c$.

- Si $c = f(a)$, on pose $\bar{x} = a$
  Si $c = f(b)$, on pose $\bar{x} = b$ } et on a terminé.

- Sinon $c \in]f(a), f(b)[$ et on construit $\bar{x}$ par dichotomie / bissection :



Soit $x_1 = \frac{a+b}{2}$

Si $\begin{cases} f(x_1) = c & \text{on pose } \bar{x} = x_1 \to \text{terminé.} \\ f(x_1) > c & \text{on pose } a_1 = a \text{ et } b_1 = x_1 \\ f(x_1) < c & \text{on pose } a_1 = x_1 \text{ et } b_1 = b \end{cases}$

$\vdots$

Soit $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ (milieu de $[a_{n-1}, b_{n-1}]$)

Si $\begin{cases} f(x_n) = c & \text{on pose } \bar{x} = x_n \to \text{terminé} \\ f(x_n) > c & \text{on pose } a_n = a_{n-1} \text{ et } b_n = x_n \\ f(x_n) < c & \text{on pose } a_n = x_n \text{ et } b_n = b_{n-1} \end{cases}$

- Si $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$, tel que $f(x_n) = c$ dans ce cas, $\bar{x} = x_n$ et on a terminé.
- Sinon on a définit 2 suites $\begin{cases} (a_n)_{n\geq 1} \text{ croissante, majorée par } b. \\ (b_n)_{n\geq 1} \text{ décroissante, minorée par } a. \end{cases}$
- De plus $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ (par récurrence) donc $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

fin 7/11

→ À suivre ...