EPFL Lénaïc Chizat

Sections MX-EL-CGC 11 novembre 2024

Analyse I – Série 8

Echauffement. (Continuité)

Est-ce que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}\,, & x > 1 \\ 3\,, & x \le 1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$?

Sol.:

Pour $x \neq 1$, la fonction f est continue puisqu'elle est une composition de fonctions élémentaires qui sont continues sur leur domaine de définition (cf. théorème du cours). Il reste donc à vérifier si f est continue en $x = 1$, c'est-à-dire si $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. D'une part on a

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3 = f(1),$$

et d'autre part, en utilisant que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, on obtient

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x^2+x+1) = 3 = f(1).$$

Ainsi f est aussi continue en $x = 1$ et donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. (Limites de fonctions)

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(x^2)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

Aide : pour b) et d) factoriser l'expression en utilisant $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$. Pour c) et e) utiliser des formules trigonométriques.

Sol.:

1. *En observant que le dénominateur divise le numérateur, on a*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,(x^2+2x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(x^2+2x+2\right).$$

Pour calculer cette limite, on utilise les propriétés algébriques :

$$\lim_{x\to 1} \left(x^2+2x+2\right) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 2x + 2 = \left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 + 2\lim_{x\to 1} x + 2 = 1^2 + 2\cdot 1 + 2 = 5.$$

On peut aussi dire que la fonction $f(x) = x^2+2x+2$ est continu en tant que polynôme et donc $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 5$.

2. *On utilise la formule* $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ *avec* $a=\sqrt[3]{x+1}$ *et* $b=\sqrt[3]{x}$ *pour obtenir*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left((x+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)\left((x+1)^{\frac{2}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}{(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}=0\,.$$

3. *En utilisant que* $\cos(2x)=\cos(x)^2-\sin(x)^2$, *on peut récrire le numérateur comme* $\cos(x)^2-\sin(x)^2-1=-2\sin(x)^2$ *et la limite devient*

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)^2}{\sin(x^2)}=-2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right)$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x^2)}=-2\cdot 1^2\cdot 1=-2$$

car $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ *(cf. cours).*

4. *Comme* $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, *on peut simplifier la fraction en mettant au même dénominateur pour calculer la limite :*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-\frac{3}{3}=-1,.$$

où on utilise de nouveau les propriétés algébriques pour calculer la dernière limite.

5. *Avec une formule de trigonométrie on peut récrire le numérateur*

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\cdot\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$=-\left(\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right)=-\sin(a)$$

car la deuxième limite vaut 1.

Exercice 2. (Existence de limites)

Trouver les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ pour lesquelles les limites suivantes existent dans $\mathbb{R}$ (la notation tg $\equiv$ tan designe la fonction tangente) :

a) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{(\mathrm{tg}(x-\alpha))^2}{(x-\alpha)^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{x^4-2\alpha x^3+4x^2}{(x-\alpha)^2}$

Sol.:

a) Observons que $\lim_{x\to\alpha}\frac{\mathrm{tg}(x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)^2}{x^2}$. *Du cours on sait que* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$. *Ainsi*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\right)=1$$

car les deux limites existent et valent 1. *Il suit que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)^2}{x^2}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\right)^2=1^2=1$$

et donc la limite donnée existe pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) Cette limite existe dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si* α *est une racine double du polynôme au numérateur. Evalué en* α, *celui-ci devient*

$$\alpha^4-2\alpha^4+4\alpha^2=\alpha^2(4-\alpha^2)=\alpha^2(2+\alpha)(2-\alpha).$$

Les candidats sont donc les racines de ce polynôme-ci, c.-à-d. $\alpha\in\{0,-2,2\}$.
Pour $\alpha=0$, *le polynôme est* $x^4+4x^2=x^2(x^2+4)$ *dont* 0 *est bien une racine double.*
Pour $\alpha=\pm 2$, *on a*

$$x^4\mp 4x^3+4x^2=x^2(x^2\mp 4x+4)=x^2(x\mp 2)^2$$

et donc 2 *et* -2 *sont des racines doubles respectives.*
Ainsi la limite existe si et seulement si $\alpha\in\{-2,0,2\}$.

Exercice 3. (Continuité)

Etudier la continuité de la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en $x=0$ (pour b] : penser à une forme conjuguée) :

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{1/x}}\,, & x\neq 0\\ 1\,, & x=0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\,, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}\,, & x=0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\cos(1/x)\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin(1/x)\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$

Sol.:

a) On calcule les limites de $f(x)$ *lorsque* $x\to 0$ *des deux côtés en introduisant une nouvelle variable* u *tel que* $x=\frac{1}{u}$:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{u\to-\infty}f\left(\tfrac{1}{u}\right)=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{1+2^u}=1=f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{u\to\infty}f\left(\tfrac{1}{u}\right)=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{1+2^u}=0\neq f(0).$$

Donc f *n'est pas continue mais seulement continue à gauche en* $x=0$ *(Fig. 1).*

b) Notons que f *est paire parce que les fonctions* $1-\cos(x)$ *et* x^2 *sont paires. Ainsi il suffit de considérer la limite à droite (ou celle à gauche). On a*

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(x)^2}{x^2\big(1+\cos(x)\big)}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\cos(x)}$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=f(0),$$

où on a utilisé que $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1\left(=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)$ *(cf. cours) et la décomposition en produit de deux limites est valable parce que les deux limites existent. Ainsi* f *est continue en* $x=0$.

c) Considérons les suites (x_n) et (y_n) définies respectivement par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Ces suites satisfont $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ mais

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1 \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\Big(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi\Big) = 0.$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas et f n'est pas continue en $x = 0$ (Fig. 2).

d) Comme la fonction sinus prend des valeurs dans $[-1, 1]$, on a

$$-|x| \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|.$$

Par le théorème des deux gendarmes, puisque $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 = f(0).$$

Ainsi f est continue en $x = 0$ (Fig. 3).

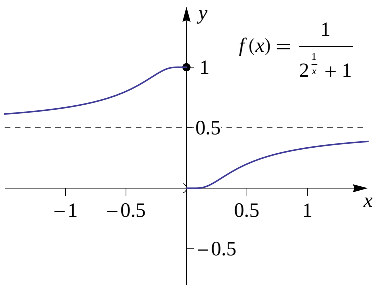

FIGURE 1 –

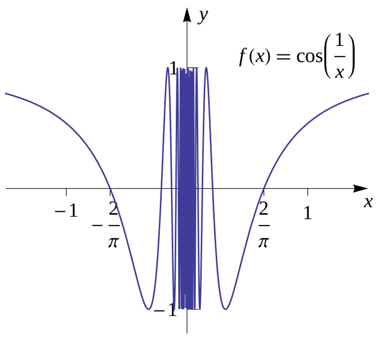

FIGURE 2 –

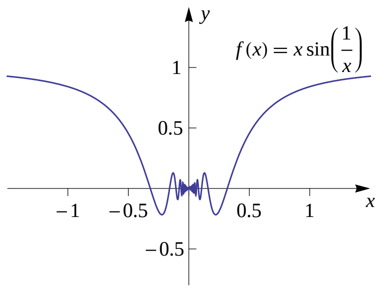

FIGURE 3 –

Exercice 4. (Continuité avec partie entière)

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 3 \cdot \Big[x(2-x)\Big] + a \cdot \Big[\cos\Big(\pi(x-1)\Big)\Big]$$

est-elle continue en $x = 1$?

Rappel : Ici, $[\cdot]$ représente la partie entière d'un nombre réel u, donnée par $[u] = \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq u\}$.

Sol.: *On a $f(1) = 3 \cdot [1] + a \cdot [1] = 3 + a$.*
Pour étudier f dans le voisinage de 1, considérons $x = 1 \pm \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. On a

$$f(1 \pm \varepsilon) = 3\Big[(1 \pm \varepsilon)(1 \mp \varepsilon)\Big] + a \cdot \Big[\cos(\pm\pi\varepsilon)\Big] = 3\Big[1 - \varepsilon^2\Big] + a \cdot \Big[\cos(\pi\varepsilon)\Big] = 3 \cdot 0 + a \cdot 0 = 0.$$

En laissant $\varepsilon \to 0$, il suit que $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Donc f est continue en $x = 1$ si et seulement si $f(1) = 0$, c'est-à-dire si $a = -3$.

Exercice 5. (Prolongement par continuité)

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0, ou alors montrer que f ne peut être prolongée par continuité en x_0.

a) $f\colon [0,1[\,\cup\,]1,\infty[\,\to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$ $\quad$ en $x_0 = 1$

b) Soit $A = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$, $f\colon]0,1] \setminus A \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{tg}\!\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\!\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$ $\quad$ pour $x_0 \in A \cup \{0\}$

c) $f\colon]1,2] \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \dfrac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{x^3-3x+2}$ $\quad$ en $x_0 = 1$

Sol.:

a) Comme l'expression de f n'est pas définie en $x = 1$, on doit calculer sa limite en ce point. Pour $x \neq 1$, on peut écrire, en utilisant a que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}} \right)$$
$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1-x}{2(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

et donc le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1\colon [0,\infty[\,\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\,, & x \neq 1 \\ -\dfrac{\sqrt{6}}{4}\,, & x = 1 \end{cases}$$

Remarque : Le prolongement par continuité s'écrit en fait aussi sans distinction de cas :

$$\hat{f}_1\colon [0,\infty[\,\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}.$$

b) Comme l'expression de f n'est pas définie pour $x \in A \cup \{0\}$, il faut passer aux limites. Pour ceci, remarquons qu'on obtient pour $x \notin A \cup \{0\}$ avec un peu de trigonométrie

$$\operatorname{tg}\!\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\!\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = \operatorname{tg}\!\left(\frac{1}{x}\right) \cos\!\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \sin\!\left(\frac{1}{x}\right) \cos\!\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit $a_n = \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^{-1} \in A$. Alors on a

$$\lim_{x\to a_n} f(x) = \lim_{x\to a_n} \sin\!\left(\frac{1}{x}\right) \cos\!\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\!\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \cos\!\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = (-1)^n \cdot 0 = 0,$$

c'est-à-dire f peut être prolongée par continuité pour tout $a \in A$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin\!\left(\frac{1}{x}\right) \cos\!\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} \sin\!\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{qui n'existe pas.}$$

Comme la limite $\lim_{x\to 0} \sin\!\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, f ne peut être prolongé par continuité en $x = 0$. Le prolongement par continuité de f est donc

$$\hat{f}_A\colon]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_A(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\!\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\!\left(\frac{1}{x}\right)^2\right), & x \notin A \\ 0\,, & x \in A \end{cases}$$

ou, sans séparation des cas, $\hat{f}_A\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, $\hat{f}_A(x) = \sin\!\left(\frac{1}{x}\right) \cos\!\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) *L'expression de f n'étant pas définie pour $x=1$, on veut calculer la limite. Comme le dénominateur de f s'écrit $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ on a*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x+2}\cdot\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x+2}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\cdot\frac{1}{\cos(x-1)}\right) = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(Attention : La décomposition en produit de deux limites à la deuxième ligne est valable parce que les deux limites existent.)
Ainsi le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1\colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{x^3-3x+2}, & x>1 \\ \frac{1}{3}\ , & x=1 \end{cases}$$

Notez que ce prolongement par continuité ne s'écrit pas sans séparation des cas.

Exercice 6. (Fonctions avec limites)

Etudier le domaine de définition et la continuité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right)$ b) $f(x) = x^4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{(x^2)^n+1}$

Sol.:

a) *On a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}} = \begin{cases} 1, & x=k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x=k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi f n'est pas continue aux points $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et continue partout ailleurs.

b) *Comme x^4 est continue, on regarde la valeur de la limite en fonction de x. Comme*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1<x<1 \\ 1, & x=1 \\ \infty, & x>1 \\ \text{n'existe pas}, & x\le -1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & -1<x<1 \\ 1, & x=\pm 1 \\ \infty, & x>1 \text{ ou } x<-1 \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^{2n}+1} = \begin{cases} -1, & -1<x<1 \\ 0, & x=1 \\ \text{n'existe pas}, & x=-1 \\ 0, & x>1 \text{ ou } x<-1 \end{cases}$$

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et n'est pas continue en $x=1$ (en fait elle est seulement continue à droite en $x=1$) et continue partout ailleurs.

Exercice 7. (QCM : Limite d'une fonction) La limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sin(2x)}$$

est égale à

☐ $+\infty$	■ 1
☐ 0	☐ 1/3

Sol.

On va appliquer le théorème des deux gendarmes pour les fonctions. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x-1 \leq x+\sin(2x) \leq x+1$ *donc pour* $x>1$ *(il est suffisant de considérer* $x>1$ *car on s'intéresse à la limite pour* $x\to\infty$*) on a*

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x}{x+\sin(2x)} \leq \frac{x}{x-1}.$$

Or $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$ *et* $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1$ *. Donc par le théorème des deux gendarmes pour les fonctions on a* $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin(2x)} = 1$.

Exercice 8. (QCM : Limite d'un suite (révisions))

On a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ si et seulement si

- ☐ Il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n > n_0, n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$.
- ☐ Pour tout $\xi > 0$, il existe un nombre naturel n_0 et une infinité des nombres naturels $n > n_0$ tels que $|a_n - l| \leq \xi$.
- ☐ Quel que soit $x > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m, n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - l| \leq 2x$.
- ☐ Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout naturel $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$.

Sol.:

- ☐ *FAUX : Prendre* $a_n = (-1)^n$, $l = 0$, $\varepsilon = 1$, $n_0 = 0$. *La propriété i) est bien respectée mais* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas.*
- ☐ *FAUX : Prendre* $a_n = (-1)^n$ *et* $l = 1$. *Alors pour tout* $\xi > 0$ *et* $n_0 = 0$, *pour tout* $n = 2k$ *naturels pairs, on a* $|a_{2k} - l| = |1-1| = 0 < \xi$, *mail la suite ne converge pas.*
- ☒ *VRAI : Il s'agit exactement de la définition de la limite d'une suite si l'on pose* $\varepsilon = 2x$.
- ☐ *FAUX : Prendre* $a_n = \dfrac{3}{n}$ $\forall n \geq 1$ *et* $\varepsilon = 2$. *On a* $|a_1 - 0| = 3 > \varepsilon$. *La suite* a_n *converge vers* 0, *mais la propriété iv) n'est pas respectée. Une autre exemple : prendre* $a_0 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \geq 1$. *La suite* (a_n) *converge vers* 0. *Mais si on prend* $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, *alors on a* $4 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *et* $|a_4 - 0| = \dfrac{1}{2} > \varepsilon$. *En général, la propriété n'est pas respectée pour les suites qui convergent moins vite que* $\dfrac{1}{n}$. *Par contre, propriété iv) implique que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Exercice 9. (Limites à gauche et à droite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $x^* \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to x^*} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x\to x^*+} f(x) = \lim_{x\to x^*-} f(x) = \ell$ (en utilisant les définitions qui font intervenir les suites).

Sol.
Preuve de "$\Rightarrow$".
Si $\lim_{x\to x^*} f(x) = \ell$ *alors pour toute suite* (u_n) *telle que* $u_n \in I \setminus \{x^*\}$ *et* $\lim_{n\to\infty} u_n = x^*$*, on a* $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$*. Cela est vrai en particulier si la suite* (u_n) *satisfait de plus* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > x^*$ *(respectivement* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < x^*$*) donc* $\lim_{x\to x^*+} f(x) = \ell$ *(respectivement* $\lim_{x\to x^*-} f(x) = \ell$*).*
Preuve de "$\Leftarrow$".
Soit une suite (u_n) *telle que* $u_n \in I \setminus \{x^*\}$ *et* $\lim_{n\to\infty} u_n = x^*$*. En supposant* $\lim_{x\to x^*+} f(x) = \lim_{x\to x^*-} f(x) = \ell$*, on veut montrer que* $\lim_{n\to\infty} f(u_n)$ *existe et vaut* ℓ*.*
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq n_0$*, on a* $u_n > x^*$ *(ou bien* $\forall n \geq n_0$*, on a* $u_n < x^*$*) alors par hypothèse on a* $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$*.*
Sinon on peut extraire de (u_n) *la suite* (u_n^-) *de tous les* $u_n > x^*$ *et la suite* (u_n^+) *de tous les* $u_n < x^*$ *et* $\lim_{n\to\infty} u_n^+ = \lim_{n\to\infty} u_n^- = x^*$*. Puisque, par hypothèse,*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n^+) = \lim_{n\to\infty} f(u_n^-) = \ell,$$

pour $\varepsilon > 0$*, on peu trouver* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq n_0$ *on a à la fois* $|f(x_n^+) - \ell| \leq \varepsilon$ *et* $|f(x_n^-) - \ell| \leq \varepsilon$*, et donc pour* $n \geq n_0$*,* $|f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$*.*