Analyse I – Série 8

Echauffement. (Continuité)

Est-ce que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}\,, & x > 1 \\ 3\,, & x \leq 1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1. (Limites de fonctions)

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(x^2)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

Aide : pour b) et d) factoriser l'expression en utilisant $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$. Pour c) et e) utiliser des formules trigonométriques.

Exercice 2. (Existence de limites)

Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les limites suivantes existent dans $\mathbb{R}$ (la notation $\mathrm{tg} \equiv \tan$ designe la fonction tangente) :

a) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{(\mathrm{tg}(x-\alpha))^2}{(x-\alpha)^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{x^4 - 2\alpha x^3 + 4x^2}{(x-\alpha)^2}$

Exercice 3. (Continuité)

Etudier la continuité de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x = 0$ (pour b] : penser à une forme conjuguée) :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{1/x}}\,, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\,, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}\,, & x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Exercice 4. (Continuité avec partie entière)

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 3 \cdot \Big[x(2-x)\Big] + a \cdot \Big[\cos\Big(\pi(x-1)\Big)\Big]$$

est-elle continue en $x = 1$?

Rappel : Ici, $[\cdot]$ représente la partie entière d'un nombre réel u, donnée par $[u] = \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq u\}$.

Exercice 5. (Prolongement par continuité)

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0, ou alors montrer que f ne peut être prolongée par continuité en x_0.

a) $f \colon [0,1[\, \cup\,]1,\infty[\, \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}} \qquad$ en $x_0 = 1$

b) Soit $A = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$, $f \colon]0,1] \setminus A \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \operatorname{tg}\!\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\!\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) \qquad$ pour $x_0 \in A \cup \{0\}$

c) $f \colon]1,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{x^3 - 3x + 2} \qquad$ en $x_0 = 1$

Exercice 6. (Fonctions avec limites)

Etudier le domaine de définition et la continuité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(x)^{2n}}{1 + \sin(x)^{2n}} \right)$

b) $f(x) = x^4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - 1}{(x^2)^n + 1}$

Exercice 7. (QCM : Limite d'une fonction) La limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + \sin(2x)}$$

est égale à

- ☐ $+\infty$
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $1/3$

Exercice 8. (QCM : Limite d'un suite (révisions))

On a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ si et seulement si

- ☐ Il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n > n_0, n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$.
- ☐ Pour tout $\xi > 0$, il existe un nombre naturel n_0 et une infinité des nombres naturels $n > n_0$ tels que $|a_n - l| \leq \xi$.
- ☐ Quel que soit $x > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m, n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - l| \leq 2x$.
- ☐ Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout naturel $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$.

Exercice 9. (Limites à gauche et à droite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $x^* \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to x^*} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x\to x^*+} f(x) = \lim_{x\to x^*-} f(x) = \ell$ (en utilisant les définitions qui font intervenir les suites).