EPFL — Cours Euler 06.11.2024
Deuxième année

Série 10

Exercice 1. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ donnés, résous le système d'équations en détaillant bien les cas :

$$\begin{cases} (a+b)x & + & (a-b)y & = & 2ab \\ (a+c)x & + & (a-c)y & = & 2ac \end{cases}$$

Arrives-tu à trouver des conditions sur a, b, c pour que l'ensemble des solutions soit une droite horizontale, verticale ou diagonale (c'est-à-dire de pente ± 1), ou le plan en entier ?

Exercice 2. Résous les systèmes d'équations suivants par substitution.

a) $\begin{cases} x^2 & + & y^2 & = & 585 \\ x & - & 8y & = & 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 & - & y^2 & = & 96 \\ x & + & y & = & 16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 & + & y^2 & = & 29 \\ xy & + & 10 & = & 0 \end{cases}$

Exercice 3. Sur une façade de 14 mètres de large un architecte aimerait placer trois fenêtres. La deuxième doit avoir une largeur égale à une fois et demi la largeur de la première et la troisième une largeur égale à la somme des largeurs des deux autres. De plus il faut prévoir 50 centimètres entre les fenêtres et les extrémités de la façade et entre les fenêtres. Est-ce possible ? Si oui, détermine la largeur des trois fenêtres (et propose un croquis de la situation).

Exercice 4. Résous les systèmes d'équations suivants par substitution et/ou par addition.

a) $\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 9 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 22 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x & + & y & & & = & 16 \\ & & y & + & z & = & 7 \\ z & + & x & & & = & 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & 16 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ 9x & - & y & + & 2z & = & 40 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 14 \\ x & + & 2y & + & z & = & 7 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \end{cases}$

Exercice 5. Pendant le match FC Zürich - Real Madrid, les Espagnols ont reçu un carton jaune de plus que le nombre de buts qu'ils ont marqués. Le nombre de buts marqués par les Suisses est égal à un tiers des cartons jaunes reçus par les Madrilènes et, si l'on enlève le seul but marqué sur penalty, il y eu autant de buts marqués pendant la rencontre que de cartons jaunes pour Madrid. Quel a été le score final ?

Exercice 6. Vrai ou faux ? Un système de deux équations linéaires à trois inconnues a toujours (au moins) une solution.

Exercice 7. Calcule les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a & a & b+c \\ a+c & b & b \\ c & a+b & c \end{vmatrix}$

Exercice 8. Résous les systèmes d'équations suivants par la méthode de Cramer.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 23 \\ 5x & + & 2y & + & 4z & = & 46 \\ 10x & + & 5y & + & 4z & = & 75 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 9. Résous les systèmes d'équations suivants par la méthode de Gauss :

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & + & y & & & = & 15 \\ x & & & & & = & 7 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 8 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & 7 \\ & & 10y & + & 14z & = & 3 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & 4z & = & 8 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & - & 8y & + & 7z & = & 1 \end{array}\right.$ **e)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & 8z & = & 8 \\ 4x & + & 5y & + & 9z & = & -9 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 8 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$

Exercice 10. Est-ce que $(3; 4; -2)$ est solution du système suivant ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ -2x & + & 6y & + & 9z & = & 0 \\ -7x & + & 5y & - & 3z & = & 7 \end{array}\right.$$

$*$ **Exercice 11.** Pour quelles valeurs du paramètre m les systèmes suivants admettent-il une solution, aucune, ou une infinité ?

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & 4z & = & -5 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & -2 \\ 3x & + & 7y & + & 7z & = & m \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 6z & + & 3u & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & + & 4u & = & -m \\ 2x & + & 3y & + & 5z & & & = & m \end{array}\right.$

Exercice 12. Détermine si les systèmes suivants sont déterminés, indéterminés, ou impossibles. (On ne demande pas de trouver les solutions.)

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & 3z & & & = & 2 \\ & & y & & & - & 3u & = & 3 \\ & - & 2y & + & 3z & + & 2u & = & 1 \\ 3x & & & & & + & 7u & = & -5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & - & 2u & = & -3 \\ & & 2y & + & 2z & & & = & 0 \\ & & & & z & + & 3u & = & 1 \\ -2x & + & 3y & + & 2z & + & u & = & 5 \end{array}\right.$