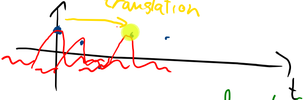
$$x_I(t) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\in\mathbb{Z}}}^{+\infty} x(mT_e)\, \underbrace{\mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)}_{\mathrm{sinc}(f_e \cdot t - m)}$$

$x_{ech} \longrightarrow x_I$ reconstruit



facteur d'échelle $\longleftrightarrow$ homothétie

Soit

- x un signal de bande passante f_{max}
- échantillonné tous les T_e (freq. éch. $f_e = \frac{1}{T_e}$)
- x_I la reconst ... formule ...

Alors

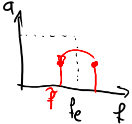
- si $f_e > 2f_{max}$ $\left(\forall t \in \mathbb{R} \quad x_I(t) = x(t)\right)$
- $\forall t \in \mathbb{R}$ $x_I(t) = x(t)$ alors $f_e \geq 2f_{max}$

Leçons II.1 et II.2 (th. d'échantillonnage) – Points clés

- formule de reconstruction :

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}(f_e\,t-m)$$

- théorème d'échantillonnage (dit « de Nyquist-Shannon »)
- effet stroboscopique / « repliement de spectre » ($\widetilde{f} = f_e - f$)
- filtrer *avant* d'échantillonner



Le théorème d'échantillonnage

Soient :

- $X(t)$ un signal de bande passante $f_{\max}$;
- $X(nT_e)$, $(n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonage f_e ;
- $X_I(t)$ donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Alors :

$$\text{Si} \quad f_e > 2 f_{\max} \quad \text{alors} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et

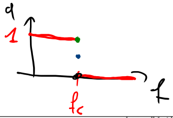
$$\text{Si} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad f_e \geq 2 f_{\max}$$

(c.-à-d. Si $f_e < 2 f_{\max}$ alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $X_I(t_0) \neq X(t_0)$)

Que donne le filtrage du signal

$$X(t) = \boxed{\overset{2}{8\sin(4\pi t)}}\ \boxed{\cancel{\overset{4}{-6\cos(8\pi t)}}} + \boxed{\overset{1}{7\cos(2\pi t)}}$$

par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = \underline{3}$ Hz ?



Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Que donne le filtrage du signal

$$X(t) = 8\sin(4\pi t) - 6\cos(8\pi t) + 7\cos(2\pi t)$$

par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 3$ Hz ?

$$\widehat{X}(t) = 8\sin(4\pi t) + 7\cos(2\pi t)$$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

$f_{max} = 6000$

$f_e = 8000\,Hz \Rightarrow f_{possible\,max} = \frac{f_e}{2} = 4000$ <

Un signal de bande passante 6000 Hz, mais ne contenant pas d'information pertinente au dessus de 3500 Hz est échantillonné à 8000 Hz après filtrage par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c.

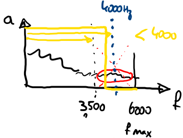
Pour que toute l'information pertinente reste dans le signal échantillonné :

A] f_c doit être légèrement inférieure à 4000 Hz.

B] f_c doit être légèrement supérieure à 4000 Hz.

C] C'est de toutes façons impossible.

D] f_c doit être légèrement supérieure à 16000 Hz.



si f_{max} après filtrage > 4000

$\to \underset{\text{artificielle}}{\tilde{f}} = f_e - f_{max}$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Un signal de bande passante 6000 Hz, mais ne contenant pas d'information pertinente au dessus de 3500 Hz est échantillonné à 8000 Hz après filtrage par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c.

Pour que toute l'information pertinente reste dans le signal échantillonné :

*A] f_c doit être légèrement inférieure à 4000 Hz.

B] f_c doit être légèrement supérieure à 4000 Hz.

C] C'est de toutes façons impossible.

D] f_c doit être légèrement supérieure à 16000 Hz.

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Le signal

$f_1 = 2Hz$

$f_2 = 4Hz$

$\rightarrow f_{max} = 200Hz$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{100} \sin(4i\pi t + \frac{\pi}{12})$$

$< 11Hz = \frac{22}{2}$

est échantillonné à une fréquence $f_e = 22$ Hz. $\Longrightarrow$ bande passante max pour pas d'erreur

Avant d'être échantillonné, on lui applique un filtre passe-bas idéal de telle sorte que l'on soit sûr d'éviter tout phénomène de « repliement de spectre » (ou « effet stroboscopique »).

Quel signal X_I obtient-on après reconstruction à partir du signal échantillonné ?

$$X \xrightarrow[10Hz < 11Hz]{\text{filtre}} \hat{X} \xrightarrow{\text{éch.}} \quad X_I(t) = \sum_{i=1}^{5} \sin(4\pi i t + \frac{\pi}{12})$$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Le signal

$$X(t) = \sum_{i=1}^{100} \sin(4i\pi t + \frac{\pi}{12})$$

est échantillonné à une fréquence $f_e = 22$ Hz.

Avant d'être échantillonné, on lui applique un filtre passe-bas idéal de telle sorte que l'on soit sûr d'éviter tout phénomène de « repliement de spectre » (ou « effet stroboscopique »).

Quel signal X_I obtient-on après reconstruction à partir du signal échantillonné ?

$$X_I(t) = \sum_{i=1}^{5} \sin(4i\pi t + \frac{\pi}{12})$$

$f_e > 2 f_{max}$?

Soit X le signal défini par :

$$X(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Y(m T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$$

avec :

$2\ Hz$ $f=5$ $f=7$

$$Y(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(14\pi t)$$

$\longrightarrow f_{max} = 7\ Hz$

$2 f_{max} = 14\ Hz$

et $T_e = 1/15$. $\longrightarrow f_e = 15\ Hz$

Quelle est une autre écriture correcte de X (pour tout t) ?

A] 0

B] $Y(0) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right)$

C] $3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$

D] $3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(14\pi t)$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Soit X le signal défini par :

$$X(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Y(m\,T_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - m\,T_e}{T_e}\right)$$

avec :

$$Y(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(14\pi t)$$

et $T_e = 1/15$.

Quelle est une autre écriture correcte de X (pour tout t) ?

A] 0

B] $Y(0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right)$

C] $3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$

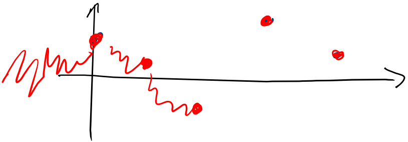
*__D]__ $3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(14\pi t)$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Pour un signal $X(t)$ échantillonné à une fréquence f_e, puis reconstruit en un signal $X_I(t)$ (par la formule de reconstruction du cours).

Les affirmations suivantes sont elles vraie ou fausse ?

- Si f_e est trop faible, il est possible d'avoir des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $X_I(nT_e) \neq X(nT_e)$. FAUX
- $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si f_e est strictement supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$. VRAIE
- La bande passante du signal $X_I(t)$ est égale à celle de $X(t)$, quelque soit f_e utilisée. FAUX
- Si $X_I(nT_e) = X(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors f_e est nécessairement supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$. FAUX



$X(nT_e)$

$\downarrow$

X_I

$$X_I(nT_e) = X(nT_e)$$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Pour un signal $X(t)$ échantillonné à une fréquence f_e, puis reconstruit en un signal $X_I(t)$ (par la formule de reconstruction du cours).

Les affirmations suivantes sont elles vraie ou fausse ?

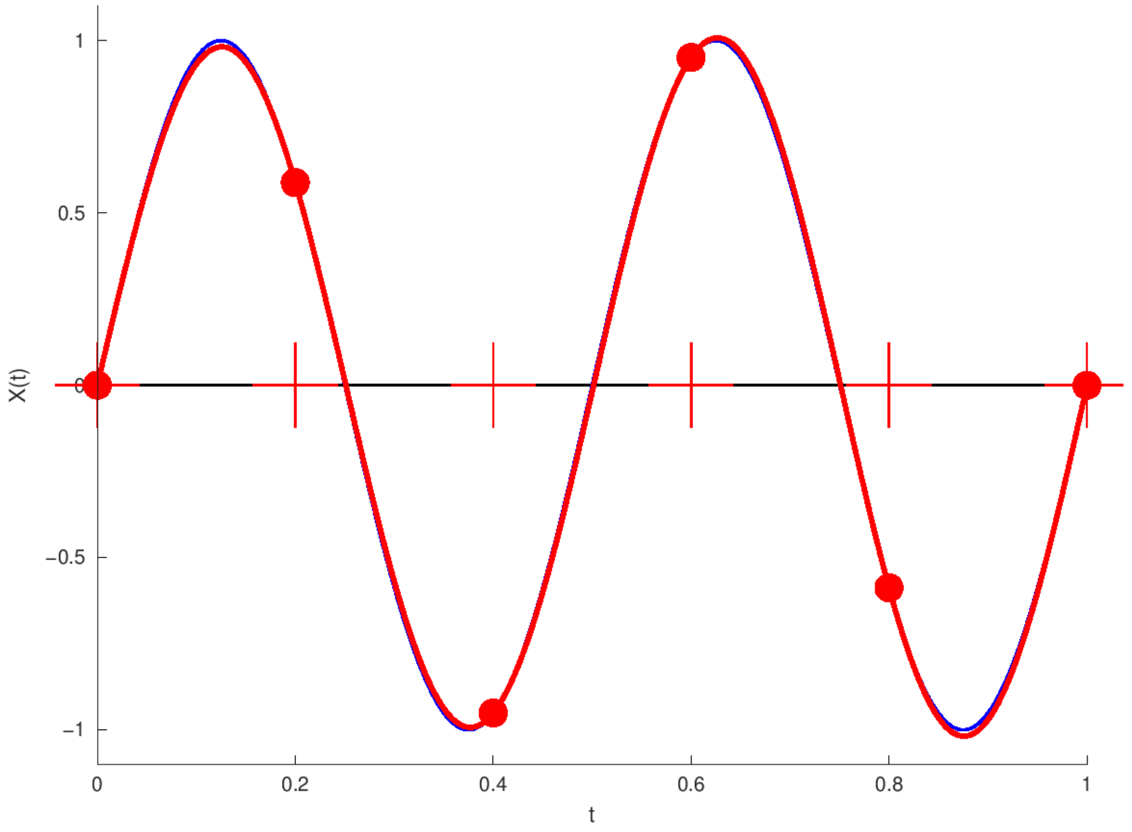
- Si f_e est trop faible, il est possible d'avoir des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $X_I(nT_e) \neq X(nT_e)$.
  Faux.
- $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si f_e est supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$.
  Vrai.
- La bande passante du signal $X_I(t)$ est égale à celle de $X(t)$, quelque soit f_e utilisée.
  Faux.
- Si $X_I(nT_e) = X(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors f_e est nécessairement supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$.
  Faux.

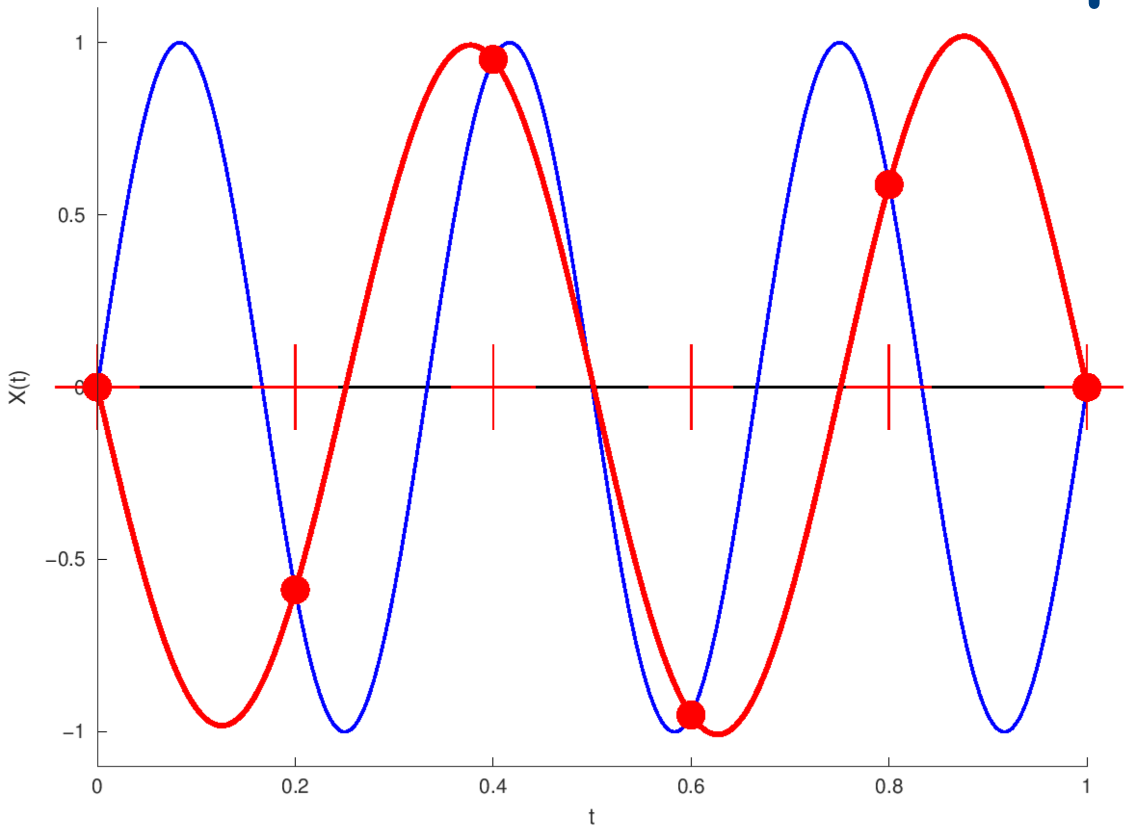
Essayons de mieux comprendre cet exemple

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

- Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.
- Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.

$f_1 = f_{max} = 3\ Hz$





Essayons de mieux comprendre cet exemple

$\sin(2\pi(-f)t)$

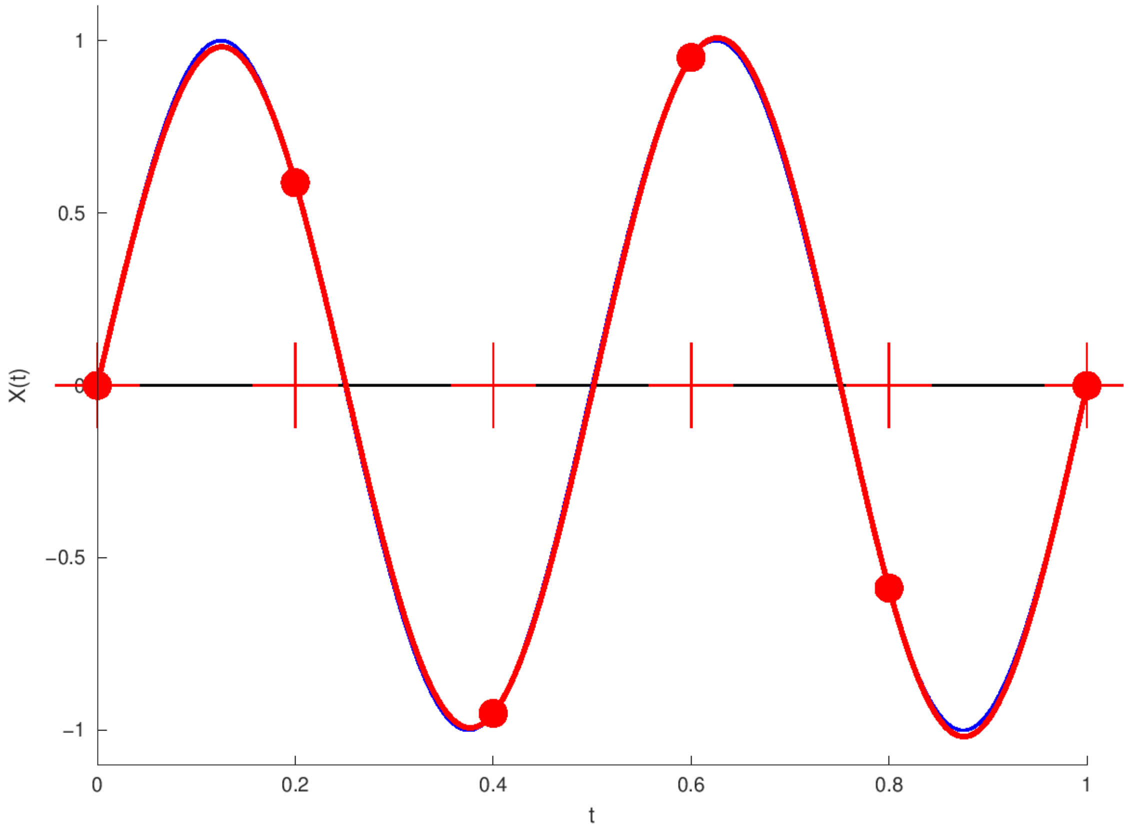
$\sin(2\pi f \boxed{t})$

$-t$

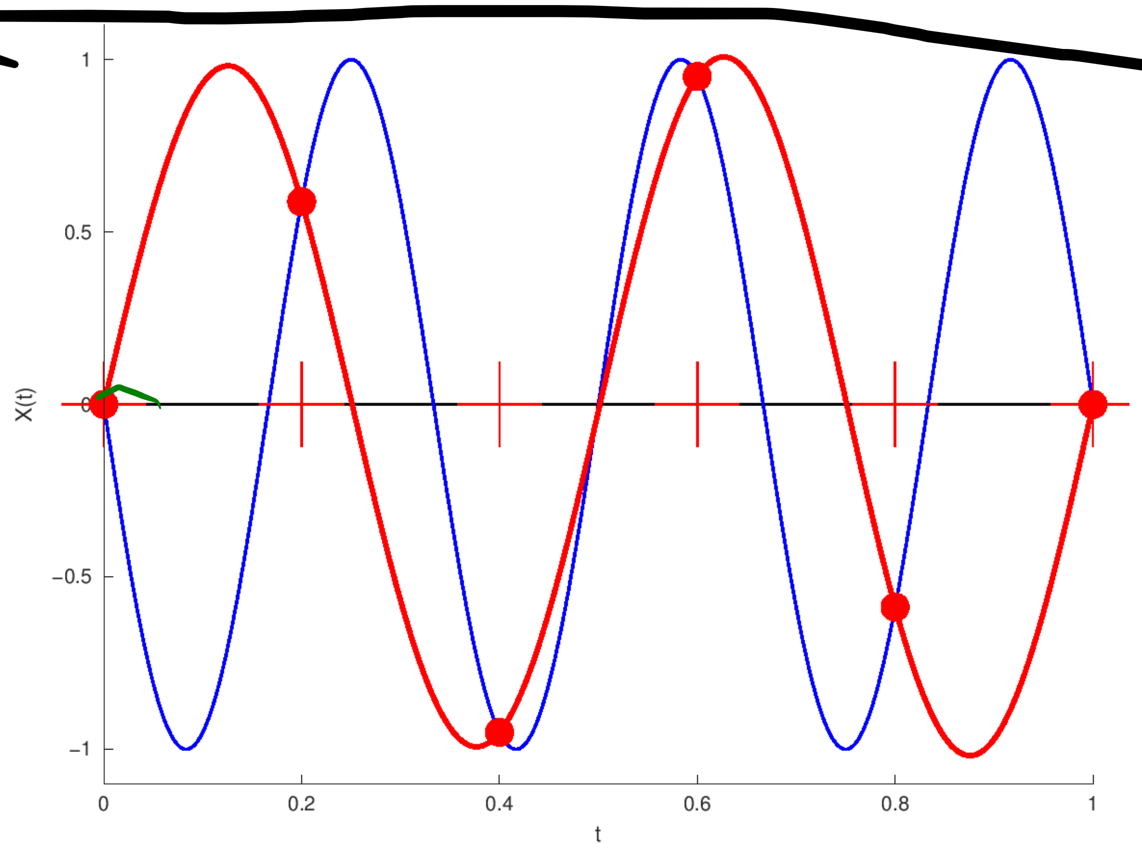
Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

$f_1 = 2\text{Hz}$

- Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.
- Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.



t



$-t$

$-\sin(t)$

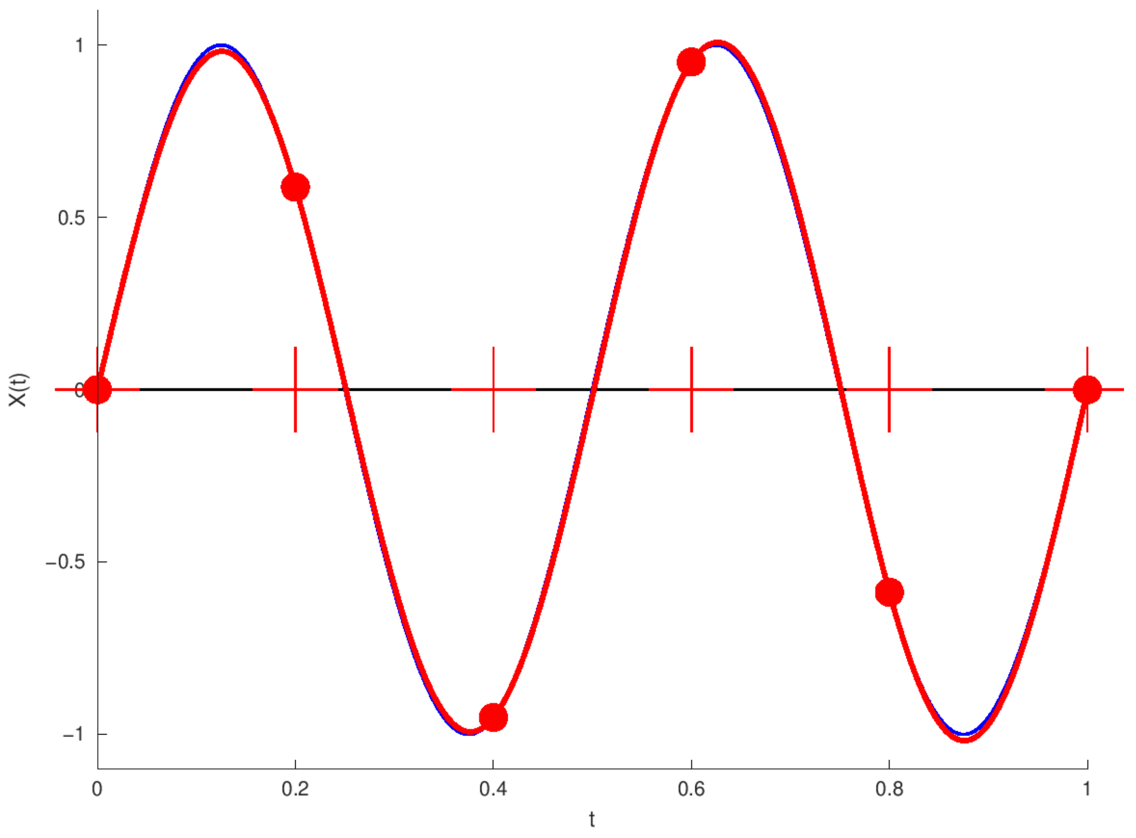
$\sin(t-\pi)$

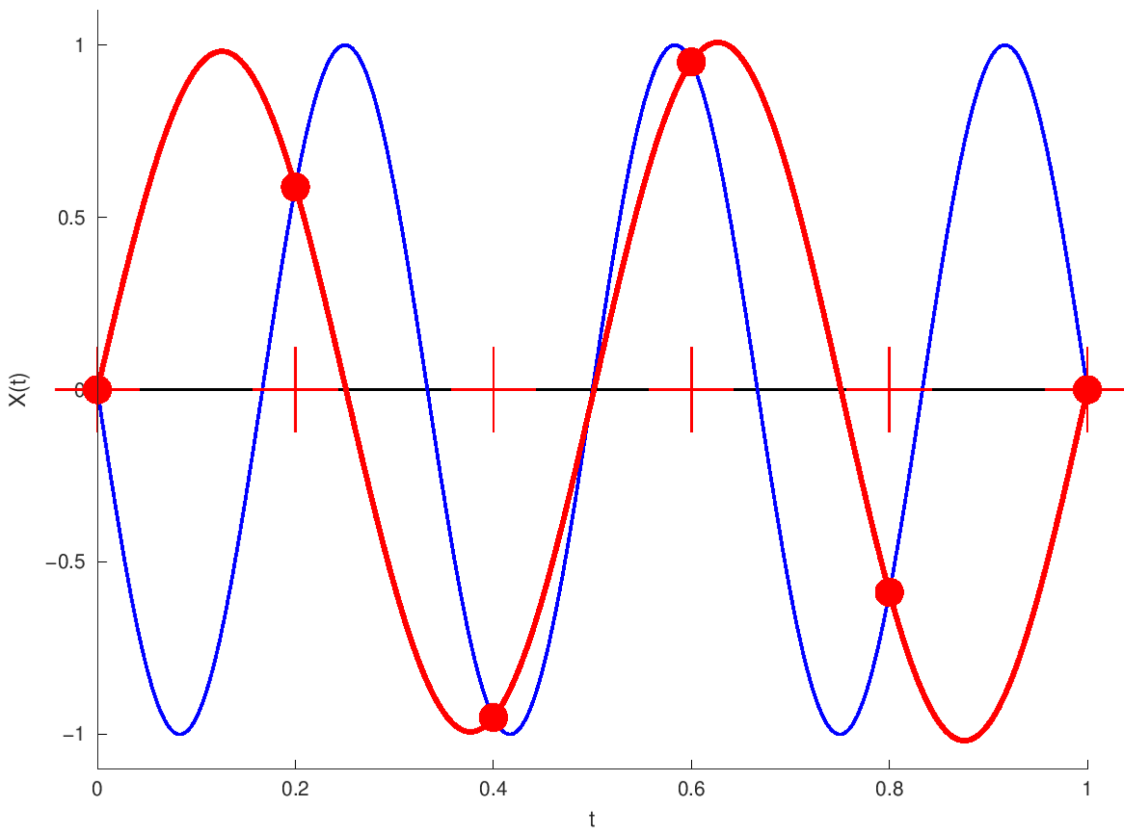
- Retournons le graphe de droite, juste pour voir...
  « *Retourner le graphe* » = inverser le temps (fréquence négative)
  = (parité du sinus) inverser les ordonnées (= multiplier par -1)
  = déphaser de π : $\sin(x-\pi) = \sin(-x)$

Essayons de mieux comprendre cet exemple

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

- Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.
- Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.





- Retournons le graphe de droite, juste pour voir...
- Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !

$$\sin(-2\pi \cdot 3 \cdot \frac{m}{5}) = \sin(-\frac{6\pi}{5} \cdot m) = \sin(\frac{4\pi}{5} \cdot m + 2\pi m) = \sin(2\pi \cdot 2 \cdot \frac{m}{5})$$