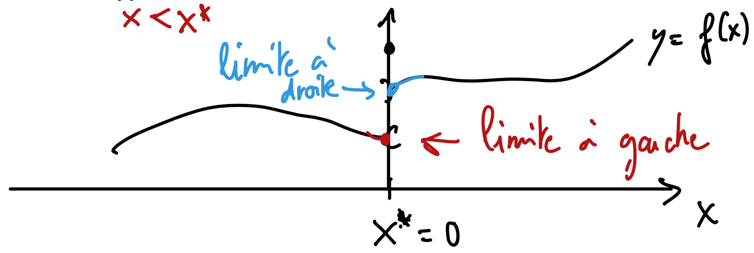


fin 31/10

- Examen blanc : mardi 12 Nov. à 10^h.
- Exercices corrigés.
- Séance de soutien demain soir.

<u>Prop</u> : $\left[\lim_{\substack{x \to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell_+ = \ell_- = \lim_{\substack{x \to x^* \\ x < x^*}} f(x)\right] \Leftrightarrow \left[\lim_{x \to x^*} f(x) = \ell_+ = \ell_-\right]$

<u>Proposition (propriétés algébriques des limites) :</u>

Si $\lim_{x \to x^*} f(x) = a$ et $\lim_{x \to x^*} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$:

Alors :
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x^*} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$.
- $\lim_{x \to x^*} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$
- Si $b \neq 0$, alors $\lim_{x \to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

(se déduit directement des propriétés algébriques des limites de suite)

<u>Exemple :</u> $\lim_{x \to 2} 3x^2 + 5 = 3\left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 + 5 = 3 \cdot 2^2 + 5 = 17$

<u>Limites infinies et à l'infini</u>

1) On écrit $\lim_{x \to x^*} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) ssi pour toute suite (x_n) telle que $x_n \in D \setminus \{x^*\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$ on a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$ (ou $-\infty$).

2) On écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (ou $+\infty$ ou $-\infty$) ssi pour toute suite (x_n) telle que $x_n \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$ (ou $+\infty$ ou $-\infty$).

3) Définition analogue pour $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Thm des gendarmes pour les fonctions

Soit $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ et $x^* \in \mathbb{R}$ t.q il existe (au moins) une suite (x_n) telle que $x_n \in D \setminus \{x^*\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Supposons que :

(i) $\exists \delta > 0$ t.q $\forall x \in D$ t.q $0 < |x - x^*| < \delta$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

(ii) $\lim_{x \to x^*} f(x) = \lim_{x\to x^*} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{x \to x^*} g(x) = \ell$.

Remarque : on peut donner un Thm. analogue pour $\ell = \pm\infty$ ou pour $x^* = \pm\infty$.
Par exemple : si $x^* = +\infty$, et $\ell \in \mathbb{R}$, il faut remplacer l'hypothèse (i) par
$\exists M > 0$, $\forall x \in D$ et $x \geq M$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Preuve : • Soit (x_n) une suite t.q $x_n \in D \setminus \{x^*\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

• Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $0 < |x_n - x^*| < \delta$
donc $\forall n \geq N$, on a donc (par (i)) : $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$

$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, $h(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ Par hypothèse (ii)

Donc par le Thm des gendarmes pour les suites, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \ell$.
Donc $\lim_{x \to x^*} g(x) = \ell$. ∎

Exemples:

(1) Étudions $\lim_{x\to+\infty} \left(\overbrace{\sqrt{x^2+x} - x}^{f(x)}\right)$ (on a $[1, +\infty[\subset D(f)$)

Pour $x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \dfrac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$

Pour $x \geq 0$, on a $x^2 \leq x^2 + x \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \leq \sqrt{x^2+x} \leq x + 1$

Donc pour $x \geq 0$, on a $f(x) \geq \dfrac{x}{x + 1 + x} = \dfrac{1}{2 + 1/x} =: g(x)$

on a $f(x) \leq \dfrac{x}{x+x} = \dfrac{1}{2} =: h(x)$

On a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{1}{2 + \lim_{x\to+\infty} 1/x} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \dfrac{1}{2}$

Donc par le Thm. des gendarmes pour les fonctions, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

(ii) Autres limites à connaître : $\cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

$\cdot \lim_{x \to 0+} (1+x)^{1/x} = e = \exp(1)$

(↑ lié à $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$)

Croissances comparées en $+\infty$

On a, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < \beta$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $1 < a < b$:

$$1 \ll \log(x) \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll a^x \ll b^x$$

où "$f(x) \ll g(x)$" signifie que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

se lit "f est asymptotiquement négligeable devant g en $+\infty$".

Exemple : $\cdot \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{100}}{e^x} = 0$ car $x^{100} \ll e^x$

$\cdot \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^{100})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{100\log(x)}{\sqrt{x}} = 0$ car $\log(x) \ll \sqrt{x}$

Définition équivalente de la limite "avec ε et δ" :

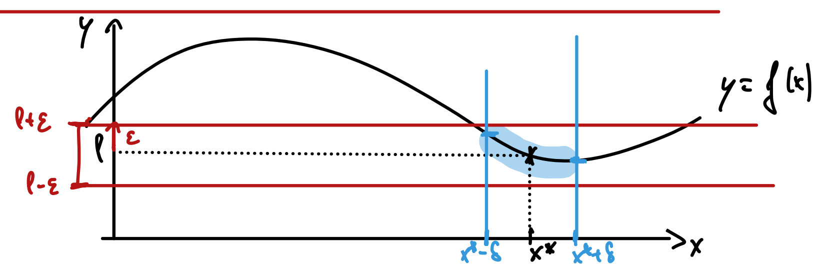
Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ et $x^* \in \mathbb{R}$ t.q $\exists (x_n)$ satisfaisant $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \\ x_n \in D \setminus \{x^*\} \end{cases}$

Prop. : f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x^* ssi :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D$:

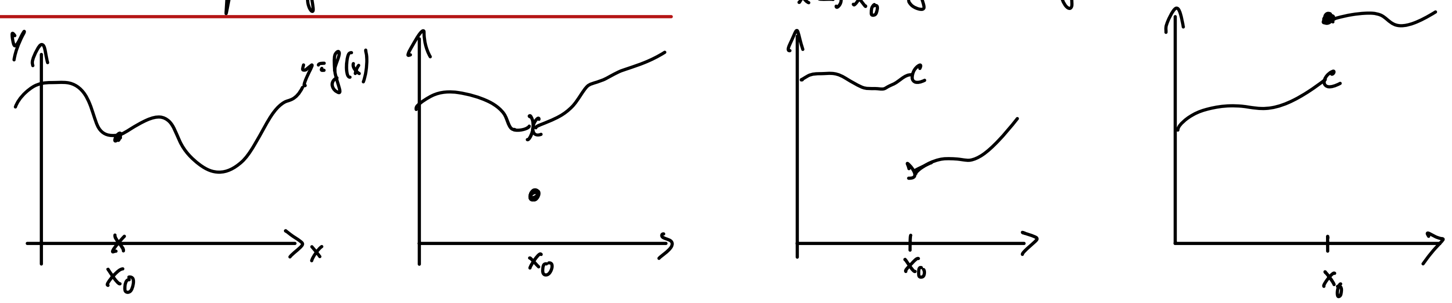
$$0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

(ou $\leq$) (ou $\leq$)



5.6 Fonctions continues

Def : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ t.q $\exists \delta > 0$, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D$.
On dit que f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$.



f est continue en x_0.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
f est discontinue en x_0

$x_0 \notin D$ donc la question de la continuité ne se pose pas

f discontinue en x_0

Def : une fonction élémentaire est une fonction $f : D(f) \to \mathbb{R}$ qui est construite à partir des fonctions polynômes, racines n-ièmes, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus et de leurs fonctions réciproques et d'un nombre fini d'opérations $+, -, \cdot, /, \circ$.
produit division composition.

Thm : Les fonctions élémentaires sont toutes continues sur leur domaine de définition.

Exemple :

- $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\cos\left(\log\left(\sqrt{\operatorname{ch}(x)}\right)\right)\right) = \exp\left(\cos\left(\log\left(\sqrt{\operatorname{ch}(0)}\right)\right)\right) = e$
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  f est continue en x_0, $\forall x_0 \in D(f)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Donc la fonction $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$ est continue en tout $x \in \mathbb{R}$.

Def (prolongement par continuité) : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$, $D =]a,b[\setminus \{x_0\}$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $g : \left| \begin{array}{l}]a,b[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array} \right.$

est appelé le prolongement par continuité de f en x_0, et g est continue en x_0.

fin 04/11