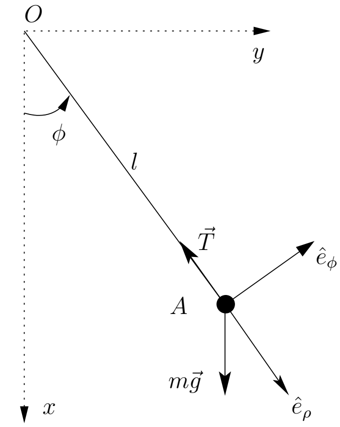
Série 08 : Energie, moment cinétique

1 Encore l'araignée

Les forces qui s'appliquent sur l'araignée sont

- son poids $m\vec{g}$, dirigé vers le bas,
- la tension dans le fil $\vec{T}$, dirigée vers le point d'attache du fil O.



Par rapport au point O, le moment de $\vec{T}$ est nul car $\vec{T}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OA}$. Le moment de $m\vec{g}$ par rapport au point O vaut

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g}.$$

Dans un repère associé aux coordonnées cylindriques (voir dessin), le moment s'écrit

$$\vec{M}_O = l\hat{e}_\rho \wedge mg(\cos\phi\ \hat{e}_\rho - \sin\phi\ \hat{e}_\phi) = -mgl\sin\phi\ \hat{e}_z\,. \qquad (1)$$

Le moment cinétique de l'araignée par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v} = l\hat{e}_\rho \wedge ml\dot{\phi}\ \hat{e}_\phi = ml^2\dot{\phi}\ \hat{e}_z, \qquad (2)$$

où l'on a utilisé l'expression pour la vitesse $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$, et le fait que $\rho = l =$ constante et $\dot{z} = 0$.
Le théorème du moment cinétique s'exprime comme suit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O\ ,$$

dans lequel on introduit les équations (1) et (9) :

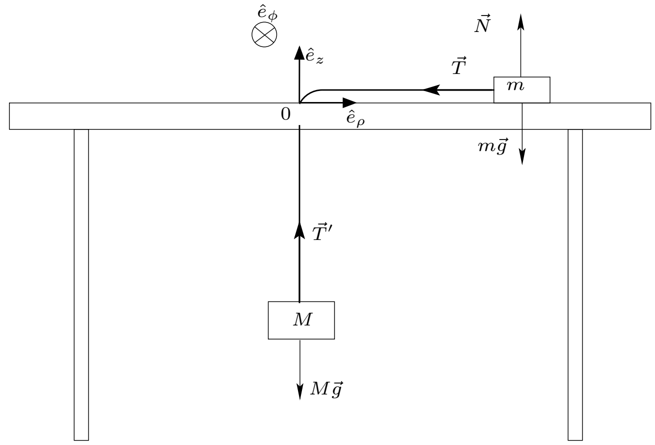
$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\phi}) = ml^2\ddot{\phi} = -mgl\sin\phi\ ,$$

qui se récrit :

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi, \qquad (3)$$

qui est bien l'équation du mouvement d'un pendule.

2 La table à trou



Les coordonnées les plus appropriées à la résolution de ce problème sont les coordonnées cylindriques. Soit $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ le repère associé à ces coordonnées. La vitesse et l'accélération s'écrivent

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z\,, \qquad (4)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z\,. \qquad (5)$$

a) L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies cinétiques et potentielles des deux blocs.
— Energie cinétique de m : $E_{cin,m} = \frac{1}{2}m\vec{v}_m^2$. Mais la masse m est contrainte à se déplacer sur la table définie par $z_m = 0$, on a donc $\dot{z}_m = 0$. Il reste

$$\vec{v}_m = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi \qquad \text{et} \qquad E_{cin,m} = \frac{1}{2}m(\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2)\,. \tag{6}$$

— Energie cinétique de M : $E_{cin,M} = \frac{1}{2}M\vec{v}_M^2$. Mais la masse M n'a qu'un mouvement vertical, donc

$$\vec{v}_M = \dot{z}_M\hat{e}_z \qquad \text{et} \qquad E_{cin,M} = \frac{1}{2}M\dot{z}_M^2\,. \tag{7}$$

— Energie potentielle de m : $E_{pot,m} = mgz_m$, mais la masse est posée sur la table, donc $z_m = 0$ et $E_{pot,m} = 0$.
— Energie potentielle de M : $E_{pot,M} = Mgz_M$.
— Les forces de tension $\vec{T} = -|T|\hat{e}_\rho$ et $\vec{T}' = |T'|\hat{e}_z$ travaillent, mais elles ne dérivent pas d'un potentiel. Par contre, on sait que les deux tensions ont la même norme ($|T| = |T'|$), et que, puisque la longueur du fil est constante, une variation $d\rho$ de la coordonnée ρ du bloc de masse m sera égale à une variation dz de la coordonée z du bloc de masse M. Les travaux de ces deux forces sont alors $\delta W = -|T|d\rho$ et $\delta W = |T'|dz = |T|d\rho$, c'est-à-dire de valeurs absolues égales mais de signes opposés. Leurs travaux s'annulent donc et ne contribuent pas à une variation de l'énergie mécanique du système.

On a donc l'énergie totale du système

$$E = \frac{1}{2}M\dot{z}_M^2 + \frac{1}{2}m(\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2) + Mgz_M\,.$$

Le fil qui relie les deux masses a une longueur fixe $L = |\rho| + |z_M|$. Comme ρ est toujours positif et z_M négatif, on peut écrire $z_M = \rho - L$ et donc $\dot{\rho} = \dot{z}_M$. Cette contrainte nous permet d'exprimer l'énergie en fonction d'une seule des deux coordonnées z_M et ρ (par exemple ρ) :

$$E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 + Mg(\rho - L)\,. \tag{8}$$

b) Les grandeurs conservées sont :
— L'énergie totale du système (8). Les forces qui s'appliquent sur la masse m sont le poids $m\vec{g}$, la force de soutien de la table $\vec{N} = -m\vec{g}$ et la tension exercée par le fil $\vec{T}$. Celles qui s'appliquent sur M sont le poids $M\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}'$ de même norme que $\vec{T}$ (pour la direction de ces forces, voir le dessin). Les forces $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont perpendiculaires au mouvement de m, elles ne travaillent donc pas. Les forces $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ travaillent, mais vu que $|\vec{T}| = |\vec{T}'|$ et $d\rho = dz_M$, on a $\delta W_T = \vec{T}\cdot\hat{e}_\rho d\rho = -|\vec{T}|d\rho = -|\vec{T}'|dz_M = -\vec{T}'\cdot\hat{e}_z dz = -\delta W'_T$.
Le poids $M\vec{g}$ travaille et est conservatif ; l'énergie potentielle dont il dérive est incluse dans l'expression de l'énergie mécanique. Au final, l'énergie mécanique (8) est conservée, car toutes les forces sont conservatives, ne travaillent pas, ou leurs travaux s'anullent.
— Les résultantes des forces qui s'appliquent sur m ($\vec{N} + m\vec{g} + \vec{T}$) et sur M ($M\vec{g} + \vec{T}'$) sont des forces centrales (dirigées vers le trou de la table au point O) et donc le moment cinétique de chaque masse (par rapport au point O) est conservé. Calculons pour chaque bloc, le moment cinétique par rapport au point O :

— Pour le bloc de masse m

$$\vec{L}_{m,O} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \rho\hat{e}_\rho \wedge m(\rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{\rho}\hat{e}_\rho) = m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\phi = m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_z\,,$$

et donc

$$\vec{L}_{m,O} \cdot \hat{e}_z = L_z = m\rho^2\dot{\phi} = cte\,. \tag{9}$$

— Pour le bloc de masse M : un calcul similaire donne un moment cinétique (constamment) nul :

$$\vec{L}_{M,O} = z_M\hat{e}_z \wedge M\vec{v}_M = z_M\hat{e}_z \wedge M\dot{z}_M\hat{e}_z = \vec{0}\,. \tag{10}$$

c) Pour calculer les équations du mouvement, on peut soit utiliser la technique habituelle en partant de la deuxième loi de Newton, soit dériver les équations (8) et (9) qui sont les intégrales premières du mouvement. Comme il a été montré au cours, la conservation de l'énergie est une intégrale première de la deuxième équation de Newton. Ces deux méthodes sont donc équivalentes, seuls les calculs changent.

— Commençons par la deuxième méthode. La dérivée de (9) donne

$$\frac{dL_z}{dt} = m(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi}) = 0\,. \tag{11}$$

Cette dérivée est nulle, car le moment cinétique est une constante.
On dérive ensuite l'équation (8), on a

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dE}{dt} &= (M+m)\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + m\rho^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + Mg\dot{\rho} \\ &= (M+m)\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\phi}(\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) + Mg\dot{\rho}\,. \end{aligned}$$

Or on peut utiliser l'équation (11) et remplacer $\rho\ddot{\phi}$ par $-2\dot{\rho}\dot{\phi}$. On obtient

$$0 = (M+m)\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + Mg\,. \tag{12}$$

— On peut aussi utiliser la deuxième loi de Newton. Les forces qui s'appliquent sur m sont le poids $m\vec{g}$, la réaction de la table $\vec{N}$ ainsi que la tension du fil $\vec{T}$. Mais $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont de même norme et de sens opposés, elles s'annulent car la masse m n'a pas d'accélération verticale. Il reste $\vec{T} = m\vec{a}_m$. Sur M, il y a le poids $M\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}'$. On a donc $\vec{T}' + M\vec{g} = M\vec{a}_M$.

On projette la première équation sur les vecteurs $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$:

$$\text{sur } \hat{e}_\rho : \qquad -T = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \tag{13}$$

$$\text{sur } \hat{e}_\phi : \qquad 0 = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \tag{14}$$

On a utilisé l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques. La deuxième équation projetée sur le vecteur $\hat{e}_z$ donne :

$$T' - Mg = M\ddot{z} = M\ddot{\rho}\,. \tag{15}$$

De (15), on tire $T' = M\ddot{\rho} + Mg$, que l'on introduit dans (13) en utilisant que les normes de $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ sont égales, pour obtenir

$$M\ddot{\rho} + Mg + m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = 0\,.$$

Cette équation est la même que (12). On peut aussi observer que les équations (14) et (11) sont identiques à un facteur ρ près.

d) En utilisant la conservation du moment cinétique on peut injecter eq. (9) dans eq. (12) pour obtenir l'équation du mouvement portant seulement sur la coordonnée ρ

$$0 = (M+m)\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{m\rho^3} + Mg\,. \tag{16}$$

Cette équation n'a pas de solution générale simple, par contre on peut s'intéresser aux "orbites" circulaires pour lesquelles ρ est une constante, et donc $\ddot{\rho} = 0$. Ainsi, une solution circulaire avec $\rho = R$ doit satisfaire :

$$0 = -\frac{L_z^2}{mR^3} + Mg \quad \Longrightarrow \quad L_z^2 = mMgR^3 \tag{17}$$

Or, dans un mouvement circulaire la vitesse v est toujours perpendiculaire au rayon et le moment cinétique s'exprime simplement comme $L_z = mvR$. En injectant dans (17) on obtient la solution recherchée :

$$v^2R^2m^2 = mMgR^3 \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \frac{Mg}{m}R \tag{18}$$

On peut vérifier ce résultat en remarquant que dans cette situation la masse M est à l'équilibre, et donc la tension dans le fil vaut Mg. Or la force centripète mv^2/R subit par m provient de la tension du fil, d'où $m\frac{v^2}{R} = Mg$.

3 Le pendule asymétrique

Les forces qui s'appliquent sur la bille sont le poids, qui est une force conservative, et la tension dans le fil, qui ne fournit aucun travail puisqu'elle est normale à la trajectoire. La conservation de l'énergie mécanique peut donc être utilisée pour répondre aux questions de ce problème.

a) Initialement, à la position 1, l'énergie E_1 de la bille est

$$E_1 = E_{cin,1} + E_{pot,1} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(d + L\cos\alpha)\,, \tag{19}$$

où l'on a exprimé l'énergie potentielle par rapport au point O.
Dans son extension maximale à l'opposé de la trajectoire (position 2), la bille est à l'arrêt ($E_{cin,2} = 0$) et le fil forme un angle β avec la verticale. On peut alors écrire l'énergie mécanique E_2

$$E_2 = \underbrace{E_{cin,2}}_{=0} + E_{pot,2} = -mg(d+L)\cos\beta\,. \tag{20}$$

La conservation de l'énergie mécanique $E_1 = E_2$ s'écrit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mg(d + L\cos\alpha) = -mg(d+L)\cos\beta\,, \tag{21}$$

d'où l'on trouve une expression générale pour la vitesse initiale de la bille :

$$v_0 = \sqrt{2gd(1-\cos\beta) + 2gL(\cos\alpha - \cos\beta)}\,. \tag{22}$$

Dans le cas particulier où $\beta = \alpha$, alors l'expression pour v_0 se simplifie comme suit :

$$v_0 = \sqrt{2gd(1-\cos\alpha)}\,. \tag{23}$$

b) La vitesse maximale $v_{\max}$ est atteinte à la position où l'énergie cinétique est maximale et l'énergie potentielle est minimale. Cette position 3 est la plus basse de la trajectoire effectuée par la bille. L'énergie E_3 s'écrit

$$E_3 = E_{cin,3} + E_{pot,3} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - mg(d+L)\,. \tag{24}$$

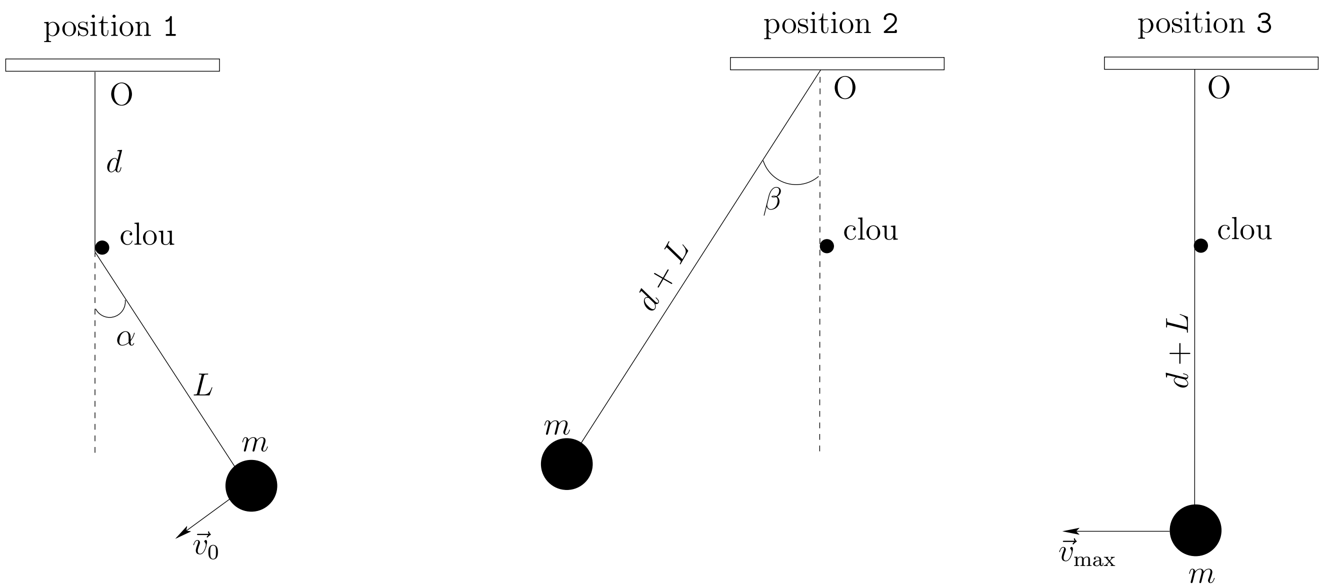
Par conservation de l'énergie, on a $E_3 = E_2$, et dans le cas particulier où $\beta = \alpha$, on a :

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - mg(d+L) = -mg(d+L)\cos\alpha\,, \tag{25}$$

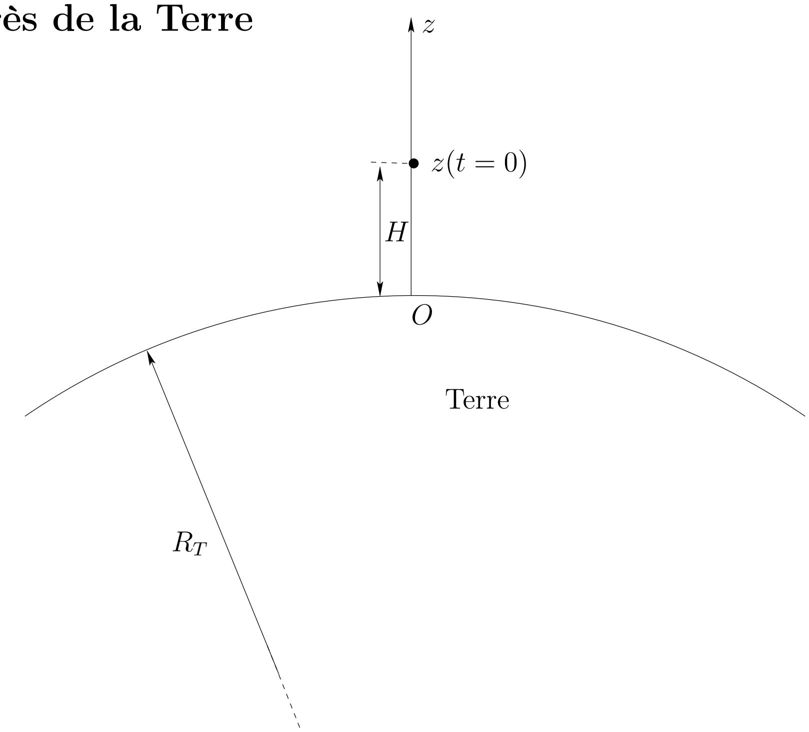
d'où l'on obtient

$$v_{\max} = \sqrt{2g(d+L)(1-\cos\alpha)}\,. \tag{26}$$

Remarque : le même résultat aurait été obtenu en posant $E_3 = E_1$.



4 Chute libre près de la Terre



a) La seule force qui s'exerce sur la bille en $z(t)$ est la gravitation, qui s'écrit

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{(R_\mathrm{T} + z)^2}\hat{e}_z \,.$$

La deuxième loi de Newton donne alors l'équation du mouvement selon $\hat{e}_z$:

$$m\ddot{z} + \frac{GmM_T}{(R_\mathrm{T} + z)^2} = 0\,. \tag{27}$$

b) En multipliant l'équation (27) par $\dot{z}$ est en calculant les primitives on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GmM_T}{R_\mathrm{T} + z}\right] = 0\,,$$

L'énergie mécanique E correspond au terme entre crochets (à une constante près), elle est conservée.

c) A la hauteur H au dessus du sol, la vitesse est nulle, d'où

$$E(z = H) = -\frac{GmM_T}{R_\mathrm{T} + H}\,.$$

Au niveau du sol, $z = 0$, et l'énergie mécanique s'écrit

$$E(z = 0) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}}\,,$$

En utilisant alors $E(z = H) = E(z = 0)$ on trouve la vitesse v au niveau du sol :

$$v = \dot{z}|_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}} - \frac{GmM_T}{R_\mathrm{T} + H}\right)} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}\left(\frac{H}{R_T + H}\right)}\,. \tag{28}$$

d) Dans le cas où l'accélération est une constante égale à l'accélération gravitationnelle au niveau du sol, $g = GM_T/R_T^2$, l'énergie mécanique E_g de la bille est

$$E_g(z_g, \dot{z}_g) = \frac{1}{2}m\dot{z}_g^2 + m\frac{GM_T}{R_T^2}z_g = m\frac{GM_T}{R_T^2}H\,.$$

Dans ce cas, la vitesse au sol devient

$$v_g = \dot{z}_g|_{z_g=0} = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T^2}H}\,. \tag{29}$$

Pour comparer les deux vitesses données par les équations (28) et (29), on peut calculer leur différence :

$$\Delta v = v - v_g = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}\left(\frac{H}{R_T + H}\right)} - \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T^2}H} = \sqrt{\frac{2GM_TH}{R_T^2}}\left(\sqrt{\frac{R_T}{R_T + H}} - 1\right)\,,$$

et la différence relative

$$\frac{\Delta v}{v_g} = \sqrt{\frac{R_T}{R_T + H}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{H}{R_T}}} - 1.$$

Puisque $\epsilon = \frac{H}{R_T} \ll 1$, on peut utiliser l'approximation $(1+\epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon$, et exprimer la différence relative comme

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{H}{R_T}}} - 1 \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{H}{R_T} - 1 = -\frac{H}{2R_T}.$$

L'application numérique nous donne que pour une chute de $H = 1000$ m, la vitesse au niveau du sol est

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.9 \cdot 10^{24}}{6371 \cdot 10^3} \left(\frac{1000}{6371 \cdot 10^3 + 1000}\right)} = 139.24\,\mathrm{m/s}$$

pour la force qui dépend de la hauteur, et

$$v_g = \sqrt{2 \times \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.9 \cdot 10^{24}}{(6371 \cdot 10^3)^2} \times 1000} = 139.25\,\mathrm{m/s}$$

pour le cas où l'accélération est constante. La différence vaut donc $0.01\,\mathrm{m/s}$, et la différence relative est

$$\frac{\Delta v}{v_g} \approx -\frac{1000}{2 \times 6371 \cdot 10^3} = -8 \cdot 10^{-5}\,,$$

ce qui montre que l'hypothèse de l'accélération constante proche de la surface de la Terre est une excellente approximation.