(**) $\forall x \in D$, on a $(i_1 \circ i_2)(-x) = i_1(i_2(-x))$
$= i_1(-i_2(x))$
$= -i_1(i_2(x)) = -(i_1 \circ i_2)(x)$ ■

fin cours 28/10

Examen Blanc :
- semaine du 11 au 15 novembre
- durée 1^h (QCM, Vrai / Faux)
- Programme : cours jusqu'à aujourd'hui
- Horaire, salles (ou à la maison) : à déterminer.

Vrai examen :
- 80 % QCM et Vrai / Faux, 20 % questions ouvertes
- Durée 3^h30
- Pas de calculatrice, aucun document

5.3 Périodicité

Déf : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite T-périodique ($T \in]0,+\infty[$) ssi
- $\forall x \in D$, $x+T \in D$, $x - T \in D$
- $\forall x \in D$, $f(x+T) = f(x)$

On peut déduire, par récurrence, de cette définition $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}, f(x+kT) = f(x). \\ \forall k \in \mathbb{Z}, x \in D \Rightarrow x+kT \in D \end{cases}$

- T est une période de f
- le plus petit $T>0$ qui satisfait la définition, s'il existe est appelé la période de f.

Exemple : $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x)^2 \end{vmatrix}$

2π, 4π, 6π sont des périodes de f.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+\pi)^2 = (-\sin(x))^2 = \sin(x)^2$ donc f est aussi π-périodique.

Comme $\sin(0)^2 = 0$ et $\forall a \in]0,\pi[$, $f(0+a) = \sin(0+a)^2 > 0$ donc f n'est a-périodique.

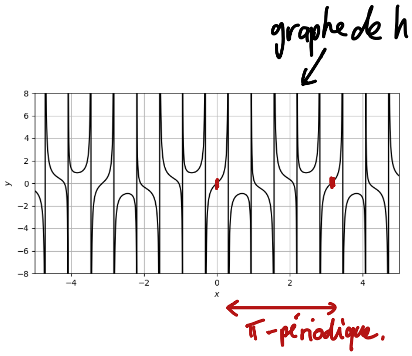
Donc π est la période de f.

Prop: Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions T_f, resp. T_g, périodiques et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Alors :

- si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$ et donc $\frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ alors $f+g$ et $f \cdot g$ sont T-périodiques avec $T = q \cdot T_f = p \cdot T_g$.
- $h \circ f$ est T_f périodique.

Exemple: $h(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(5x)} = f(x) \cdot g(x)$ avec $\begin{cases} f(x) = \sin(3x) \\ g(x) = \frac{1}{\cos(5x)} \end{cases}$

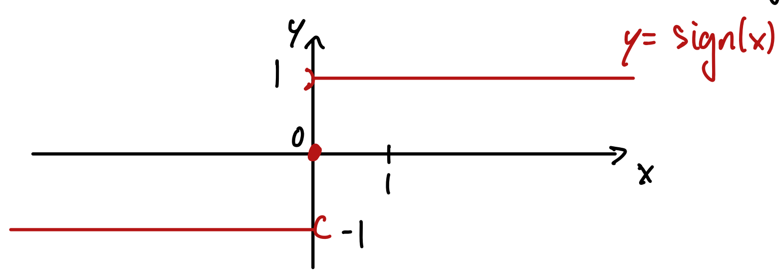
$$\begin{aligned} D(h) &= \mathbb{R} \setminus \{ x \in \mathbb{R} ; \cos(5x) = 0 \} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{ x \in \mathbb{R} ; 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{ x \in \mathbb{R} ; x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} , k \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$



- $D(h)$ est symétrique
- f est impaire, g est paire et donc h est impaire.
- La période de f est $T_f = \frac{2\pi}{3}$ et la période de g est $T_g = \frac{2\pi}{5}$.
- On a $\frac{T_f}{T_g} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{5}{2\pi} = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ donc h est périodique et une période de h est $3T_f = 5T_g = 2\pi$.

5.4 Fonctions définies par morceaux

Exemple: la fonction signe : $\text{sign} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$.



Composition (exemple) :

$$\underset{(D(f)=\mathbb{R})}{f(y)} = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 1 \\ -y & \text{si } y < 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \underset{(D(g)=\mathbb{R})}{g(x)} = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x+3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donner l'expression de $h = f\circ g$ ($h(x) = f(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}$)

I. $x \geq 0$ et $g(x) \geq 1$

II. $x \geq 0$ et $g(x) < 1$

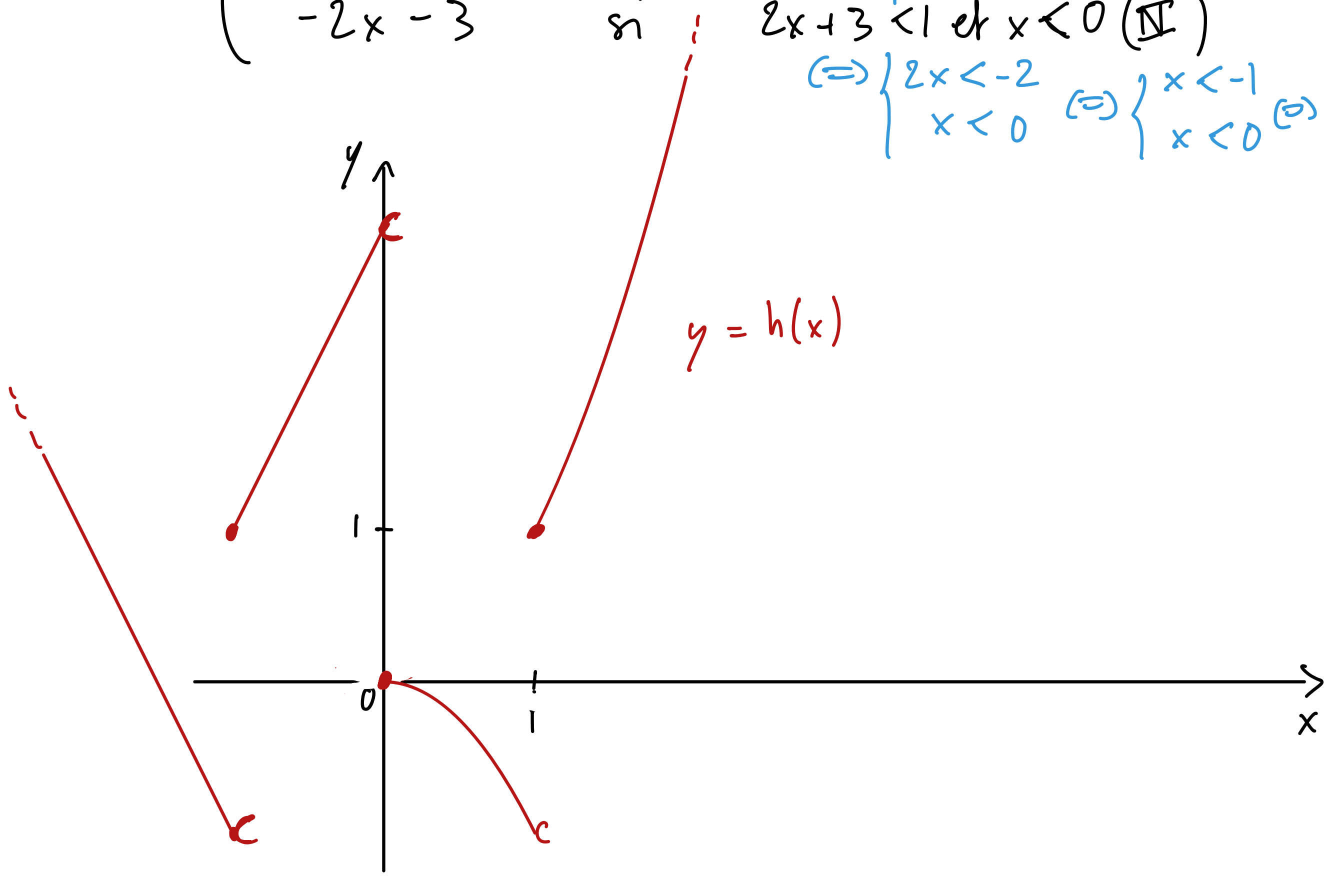
III. $x < 0$ et $g(x) \geq 1$

IV. $x < 0$ et $g(x) < 1$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} & x \geq 1 & (I) \\ -x^2 & \text{si} & 0 \leq x < 1 & (II) \\ 2x+3 & \text{si} & 2x+3 \geq 1 \text{ et } x < 0 & (III) \\ -2x-3 & \text{si} & 2x+3 < 1 \text{ et } x < 0 & (IV) \end{cases}$$

(III) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{-1 \leq x < 0}$

(IV) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x < -2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x < -1}$



5.5 Limite de fonctions

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $x_n \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}$

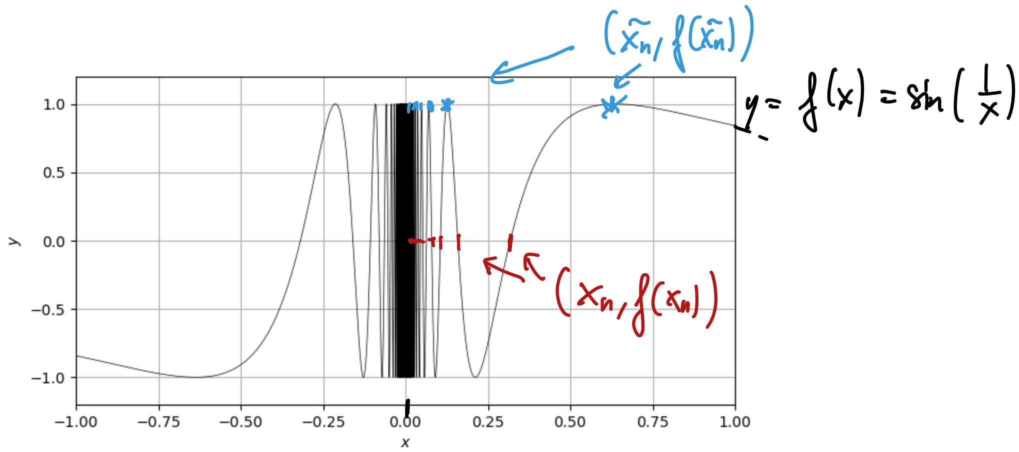
Que peut-on dire sur la convergence de $(f(x_n))_{n \geq 0}$?

En général : rien !

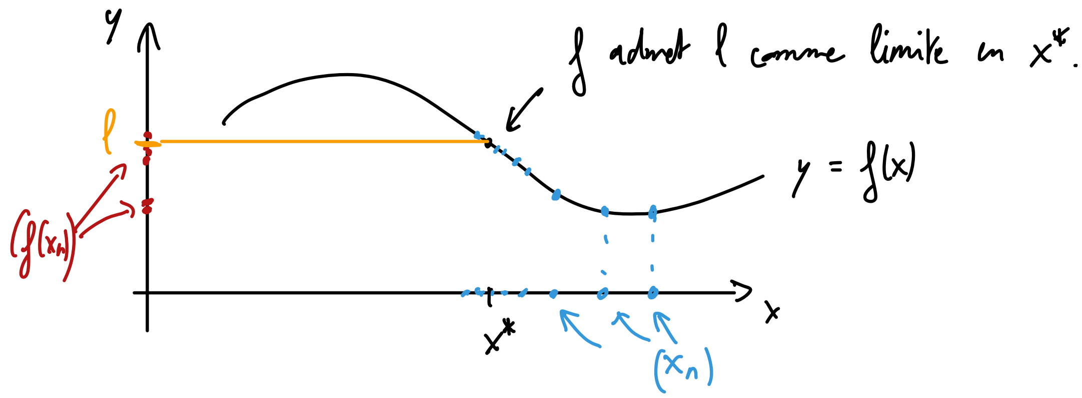
Exemple : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D(f) = \mathbb{R}^*$

a) $x_n = \frac{1}{n\pi}$ alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

b) $\tilde{x}_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ alors $\tilde{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f(\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$



Déf : On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x^* si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D \setminus \{x^*\}$ alors la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

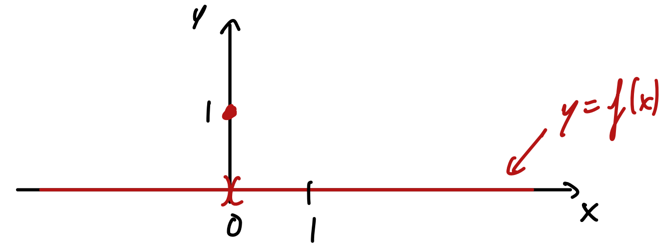


Notation : si f admet ℓ pour limite quand x tend vers x^*, on écrit :

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = \ell \quad \text{aussi noté} \quad f(x) \xrightarrow[x\to x^*]{} \ell .$$

Exemples :

(1) $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$



Soit (x_n) une suite telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et $x_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ $(\neq f(0))$

(2) $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2+2x+1}{x+1} \end{array}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x+1} = x+1$

Soit $x^* = -1$. Pour toute suite (x_n) telle que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \neq -1 \\ \lim_{n\to\infty} x_n = -1 \end{cases}$

on a $f(x_n) = x_n + 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1+1 = 0$

Donc $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$.

(3) On a vu : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Def : (limites à droite et à gauche). On dit que une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet pour limite à droite $\ell_+ \in \mathbb{R}$ (resp. à gauche $\ell_- \in \mathbb{R}$) quand x tend vers x^* ssi pour toute suite (x_n) telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D \cap]x^*, +\infty[$ (resp. $x_n \in D \cap]-\infty, x^*[$), la suite $(f(x_n))$ converge et

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell_+ \qquad \left(\text{resp. } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell_-\right).$$

Notation : $\lim_{x\to x^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell_+$: limite à droite

$\lim_{x\to x^-} f(x) = \lim_{x\to x^*} f(x) = \ell_-$: limite à gauche