Analyse I – Série 7

Echauffement. (Périodicité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

a) La période de f est-elle toujours définie ?
b) Montrer que la fonction $|f|$ est aussi périodique.
c) La réciproque de *b*) est-elle vraie ?
d) La période de $|f|$ est-elle toujours égale à celle de f (si elle est définie) ?

Sol.:

a) La période de f n'est pas toujours définie. En effet, la fonction constante est périodique pour tout $T > 0$ mais elle n'a pas de période au sens strict (il n'existe pas de plus petit $T > 0$ tel que f soit T-périodique).

b) La fonction $|f|$ est périodique car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x+T)| = |f(x)|$, où T est une période de f.

c) La réciproque est fausse : Pour la fonction non périodique f représentée à la Fig. 1, la fonction $|f|$ est périodique (on peut imaginer prolonger f à $\mathbb{R}$ tout entier en changeant de signe de façon non-périodique).

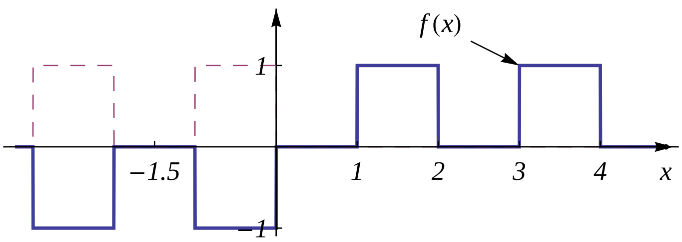


FIGURE 1 –

d) La période de $|f|$ n'est pas forcément égale à celle de f : les fonctions f et $|f|$ représentées à la Fig. 2 ont les périodes $T = 4$ resp. $T = 2$.

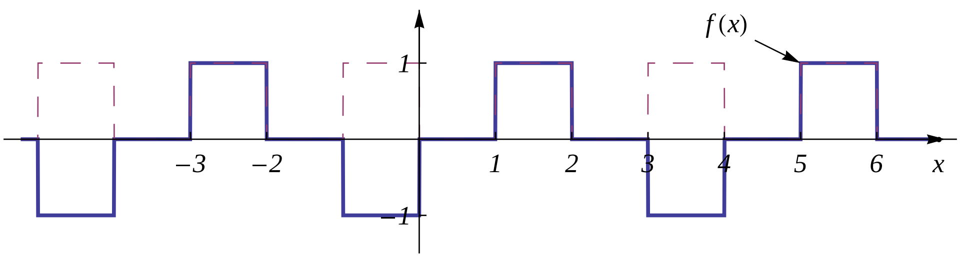


FIGURE 2 –

Notez encore que la période de $|f|$ peut ne pas exister alors que celle de f existe. Exemple : $f(x) = (-1)^{[x]}$, où $[x]$ dénote la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. (Convergence de séries avec un paramètre)

Etudier la convergence de la série en fonction de la valeur de $c \in \mathbb{R}$.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n$, $c \neq 1$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (c-a)^n$, $a \in \mathbb{R}$ fixé f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+c^2)^n$

Quelle est la somme de la série c) lorsqu'elle converge ?

Sol.:

a) La série géométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n$ *converge absolument* $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{c}{1-c}\right| < 1$ $\Leftrightarrow$ $c < \frac{1}{2}$.
Remarque *: On pourrait aussi utiliser le critère de Cauchy et puis traiter le cas où le critère de Cauchy ne permet pas de conclure (limite = 1) séparément. En effet, quand* $\left|\frac{c}{1-c}\right| = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ *, on obtient la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ *qui diverge.*

b) Pour $c = 0$ la convergence vers 0 est évidente et on peut supposer que $c \neq 0$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}|c|\right) = |c|,$$

ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de d'Alembert, que la série converge absolument si $|c| < 1$ et qu'elle diverge si $|c| > 1$. Si $c = \pm 1$, la série diverge (évident pour $c = 1$; et $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ pour $c = -1$ et donc la série diverge car le terme général diverge).

c) Pour $c = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $\left|\left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n\right| = 1$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc la série diverge.*
Pour $c \neq 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a par le critère de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left|\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right| < 1,$$

et donc la série converge absolument et sa somme vaut (série géométrique commençant à $n = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n = \frac{\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)} .$$

d) Pour $c = 0$, la série converge et est égale à zéro. Soit donc $c \neq 0$. En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{c^n n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|c \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|c|}{e} .$$

Ainsi la série converge absolument si $|c| < e$ et elle diverge si $|c| > e$ (et on obtient aucune information si $|c| = e$).

Si $c = \pm e$, la suite des valeurs absolues $(|a_n|)_{n\geq 1}$ est croissante :

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > |a_n|$$

car la suite $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ croît vers e. Comme $|a_1| = |c| = e$, il suit que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Le critère nécessaire pour la convergence d'une série n'est donc pas satisfait et la série diverge.

e) *Comme $\sum_{n=1}^{\infty}(c-a)^n$ est une série géométrique, elle converge si et seulement si $|c-a| < 1$, c'est à dire si $c \in]a-1, a+1[$.*

f) *La série diverge pour toute valeur de c.*

Exercice 2. (Suite de sommes partielles)

Soit $0 < c < 1$, et posons pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = 1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}.$$

a) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $cS_n - S_n$.

b) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kc^{k-1}$.

Sol.:

a) *On calcule*

$$\begin{aligned} cS_n - S_n &= c(1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}) - (1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}) \\ &= -(1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1}) + nc^n = -\frac{1-c^n}{1-c} + nc^n. \end{aligned}$$

b) *En utilisant le résultat de i) on a d'une part pour tout $n \geq 1$:*

$$\sum_{k=1}^{n} kc^{k-1} = S_n = \frac{1}{c-1}\left(-\frac{1-c^n}{1-c} + nc^n\right) = \frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1}\ . \tag{1}$$

Dans l'Ex. 1b) on a montré que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc^n$ converge pour $|c| < 1$, donc en particulier pour $0 < c < 1$. Ainsi par le critère nécessaire de convergence d'une série, $\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$. En laissant $n \to \infty$ dans (1), on obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1}\right) = \frac{1}{(1-c)^2}.$$

Exercice 3. (Fonctions périodiques)

Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes en donnant la période le cas échéant :

a) $f(x) = \dfrac{x^4\cos(3x)}{1+\sin(x)^2}$

b) $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

c) $f(x) = \mathrm{tg}(3x) + \cos(\pi x)$

d) $f(x) = (x - [x])^2$

Notation : $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (c.-à-d. $[x] \in \mathbb{Z}$ tel que $[x] \leq x < [x] + 1$.

Sol.:

1. *$D(f) = \mathbb{R}$. f est paire parce que les fonctions $x^4, \cos$ et $\sin^2$ sont paires. f est non périodique à cause du terme x^4.*
2. *$D(f) = \mathbb{R}$. $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ est impair et 4π-périodique ; $\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ est pair et 6π-périodique. Ainsi f est impaire et 12π-périodique.*
3. *La fonction $\operatorname{tg}(3x)$ n'est pas définie pour $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, donc*
$$D(f) = \mathbb{R} \Big\backslash \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
$\operatorname{tg}(3x)$ est $\frac{\pi}{3}$-périodique et impaire. $\cos(\pi x)$ est 2-périodique et pair.
On a $f(0) = -1 \neq 0$ donc f n'est pas impaire et $f(1/2) = \operatorname{tg}(3/2) > 0$ (car $0 < 3/2 < \pi/2$) et $f(-1/2) = \operatorname{tg}(-3/2) < 0$, donc f n'est pas paire. Donc f n'est ni paire ni impaire. Le théorème du cours ne permet pas de déterminer si f est périodique car $\dfrac{\pi/3}{2} \notin \mathbb{Q}$. En fait (mais ce n'est pas prouvable avec les éléments du cours), f n'est pas périodique d'après le théorème suivant (qui n'est pas au programme) :
Soient f_1 et f_2 des fonctions continues périodiques non-constantes sur un domaine périodique D telles que leur somme $f_1 + f_2$ n'est pas constante. Alors $f_1 + f_2$ est périodique si et seulement si le ratio des périodes de f_1 et f_2 est un nombre rationnel.
4. *$D(f) = \mathbb{R}$. f n'est ni paire, ni impaire, mais 1-périodique (cf. Fig. 3).*

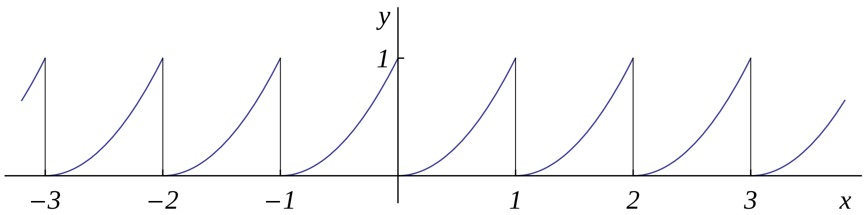


FIGURE 3 –

Exercice 4. (Fonctions monotones)

Soient les fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de leur composée $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si

a) f et g sont croissantes,
b) f et g sont décroissantes,
c) f est croissante et g est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de $f \circ g$ dans le cas c) ?

Sol.:

a) Comme f et g sont croissantes, on a
$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \quad f(x_1) \leq f(x_2) \quad \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} \quad g(f(x_1)) \leq g(f(x_2)),$$
c'est-à-dire $g \circ f$ est aussi croissante.

b) Comme f et g sont décroissantes, on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} \quad f(x_1) \geq f(x_2) \quad \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \quad g(f(x_1)) \leq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire $g \circ f$ est croissante.

c) Pour f croissante et g décroissante on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \quad f(x_1) \leq f(x_2) \quad \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \quad g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire $g \circ f$ est décroissante.
Pour la composée $f \circ g$ on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \quad g(x_1) \geq g(x_2) \quad \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \quad f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)),$$

c'est-à-dire $f \circ g$ est aussi décroissante. La composée de deux fonctions avec monotonies opposées est donc toujours décroissante.

Exercice 5. (Fonctions hyperboliques)

Vérifier les égalités suivantes :

a) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$

b) $\big(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)\big)^k = \operatorname{ch}(kx) + \operatorname{sh}(kx)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Sol.:

1. *On commence par le côté droit de l'égalité.*

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((e^x)^2 - \left(e^{-x}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) = \operatorname{sh}(2x) \end{aligned}$$

2. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\big(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)\big)^k = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^k = (e^x)^k = e^{kx} = \operatorname{ch}(kx) + \operatorname{sh}(kx).$$

Exercice 6. (Fonctions hyperboliques réciproques)

Trouver les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques en suivant les étapes ci-dessous.

a) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ b) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$

c) $f(x) = \operatorname{th}(x)$ d) $f(x) = \operatorname{coth}(x)$

- Donner le domaine de définition et l'image de f.
- Exprimer la fonction réciproque f^{-1} en termes des fonctions Log, $\sqrt{\ }$ et polynômes.
- Préciser le domaine de définition de f^{-1}.
- Esquisser les graphes de f et f^{-1}.

Sol.:

Remarque préliminaire : Pour trouver la fonction réciproque, il faut résoudre l'équation $y = f(x)$ pour x et puis échanger les variables x et y.

1. *La fonction* $\mathrm{sh}(x)$ *va de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *(cf. Fig. 4). On a*

$$y = \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}\,.$$

Comme $e^x > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ *et donc la fonction réciproque est*

$$\mathrm{arsinh}(x) := \mathrm{Log}\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big)\,.$$

Comme $\sqrt{x^2+1} > |x|$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ *aussi pour* $x < 0$*. Ainsi le domaine de* arsinh *est* $\mathbb{R}$ *(la fonction* sh *est en fait bijective de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$*). Les graphes des fonctions* sh *et* arsinh *sont tracés sur les Figs. 4 et 5.*

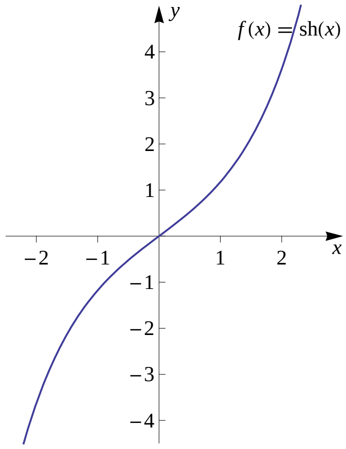


FIGURE 4 –

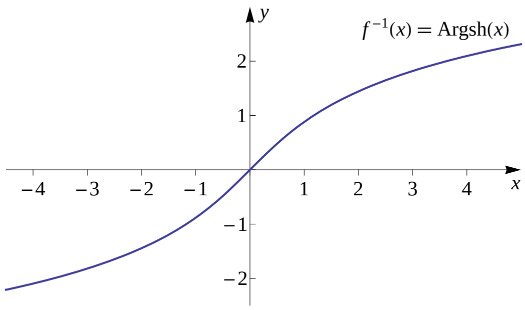


FIGURE 5 –

2. *Le domaine de* $\mathrm{ch}(x)$ *est* $\mathbb{R}$ *mais son image est* $[1, \infty)$ *(cf. Fig. 6). On a*

$$y = \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2y = e^x + \frac{1}{e^x} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$

Comme $y = \mathrm{ch}(x) \geq 1$*, la radicande est bien non-négative. La condition* $e^x > 0$ *est satisfaite pour les deux signes de la racine. Comme* $y \geq 1$*, on obtient* $e^x \geq 1$ *si on prend* $+\sqrt{\cdot}$ *et* $e^x \leq 1$ *si on prend* $-\sqrt{\cdot}$*. Ces deux solutions correspondent donc aux cas* $x \geq 0$ *et* $x \leq 0$ *respectivement. En fait, la fonction* $\mathrm{ch}(x)$ *n'est pas injective sur* $\mathbb{R}$ *mais seulement sur* $[0, \infty[$ *ou* $]-\infty, 0]$ *(cf. Fig. 6) et donc il faut la restreindre à un de ces domaines pour qu'elle soit inversible. Par convention, on prend* $x \geq 0$ *et donc la fonction réciproque est*

$$\mathrm{arcosh}\colon\ [1, \infty[\ \longrightarrow\ [0, \infty[\quad \textit{définie par} \quad \mathrm{arcosh}(x) = \mathrm{Log}\Big(x + \sqrt{x^2-1}\Big)\,.$$

Les graphes des fonctions ch *et* arcosh *sont tracés sur les Figs. 6 et 7. Comme illustration, la fonction réciproque de la fonction* $g\colon]-\infty, 0] \to [1, \infty[$*,* $g(x) = \mathrm{ch}(x)$ *est aussi tracée sur la Fig. 7 (courbe hachurée). Cette fonction correspond à la solution avec* $-\sqrt{\cdot}$ *ci-dessus.*

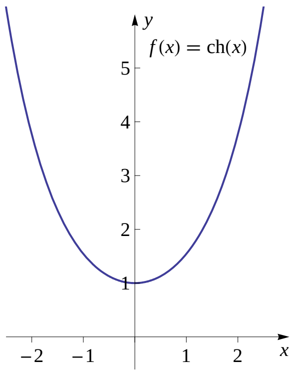


FIGURE 6 –

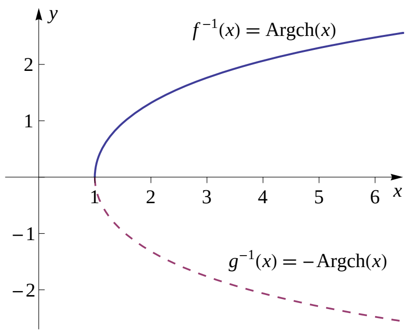


FIGURE 7 –

3. *Le domaine de* $\mathrm{th}(x)$ *est* $\mathbb{R}$ *parce que* $\mathrm{sh}(x)$ *et* $\mathrm{ch}(x)$ *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{ch}(x)$ *ne s'annule jamais. Pour trouver l'image de* $\mathrm{th}(x)$*, on calcule ses limites lorsque* x *tend vers* $\pm\infty$ *:*

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

où on a utilisé que $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$*. En effet, comme la suite* $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ *croît vers* e^x *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a en particulier que* $e^x \geq a_1 = 1 + x$*. Ainsi*

$$\lim_{x\to\infty} e^x \geq \lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty \qquad \textit{et donc} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} e^x} = 0\,.$$

L'image de $\mathrm{th}(x)$ *est donc* $]-1,1[$ *(cf. Fig. 8). On a*

$$y = \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} \quad\Leftrightarrow\quad (e^x)^2(1-y) = 1 + y \quad\Leftrightarrow\quad e^x = \pm\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Notons que $y \in]-1,1[$ *car* $\mathrm{Im(th)} =]-1,1[$ *et donc la radicande est non-négative et bien définie. Comme* $e^x > 0$*, il faut prendre la racine positive et donc la fonction réciproque de* th *est*

$$\mathrm{artanh}\colon\ ]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Les graphes des fonctions th *et* artanh *sont tracés sur les Figs. 8 et 9.*

4. *Comme la fonction* sh *s'annule en* $x = 0$*, le domaine de définition de* coth *est* $\mathbb{R}^*$*. Afin de simplifier la suite de l'exercice, observons que* $\coth(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$*. Comme l'image de* $\mathrm{th}(x)$ *est* $]-1,1[$*, il suit que l'image de* $\coth(x)$ *est* $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$*, cf. Fig. 10. On pourrait trouver la fonction réciproque en procédant comme pour la fonction* th *au iii), mais il est plus facile d'utiliser la relation avec la fonction* th *pour obtenir*

$$y = \coth(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{th}(x) = \frac{1}{y} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x = \mathrm{artanh}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{y+1}{y-1}\right).$$

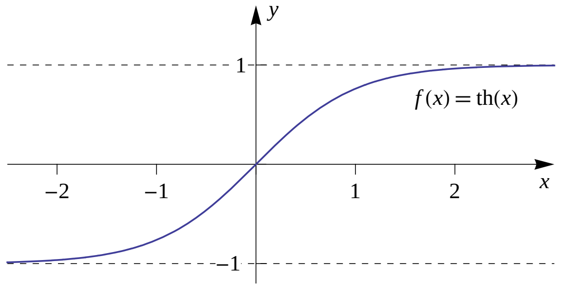


FIGURE 8 –

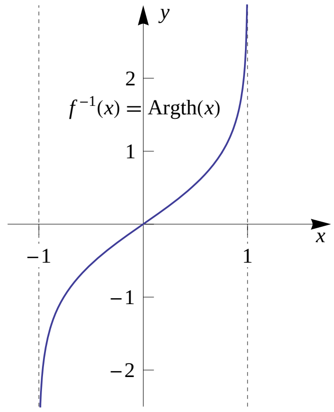


FIGURE 9 –

Notons que $|y| > 1$ *car* y *est dans l'image de* coth*, et donc l'argument du logarithme est toujours positif. Ainsi la fonction réciproque de* coth *est*

$$\operatorname{arcoth}\colon \;]-\infty, -1[\,\cup\,]1, \infty[\; \longrightarrow \; \mathbb{R}^*, \qquad \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Voir les Figs. 10 et 11 pour les graphes des fonctions coth *et* arcoth.

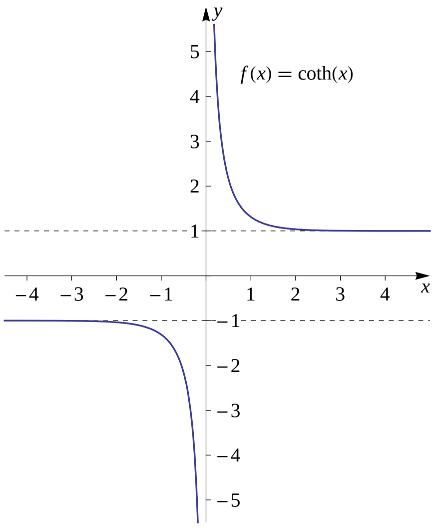


FIGURE 10 –

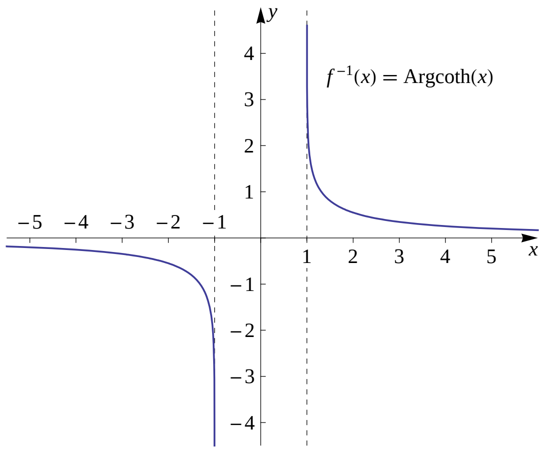


FIGURE 11 –

Exercice 7. (Fonctions bijectives)

a) Soient les fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$ telles qu'on ait pour tout $x \in A$ que $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in B$ que $(f \circ g)(y) = y$. Montrer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

b) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si f est bijective, alors sa fonction réciproque est aussi impaire.

Sol.:

a) Pour montrer que la fonction f est bijective, on doit montrer qu'elle est surjective et injective. Soit $y \in B$. Alors $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$, donc il existe $z := g(y) \in A$ tel que $y = f(z)$, c'est-à-dire f est surjective.
Soient $z_1, z_2 \in A$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. Alors on a $g(f(z_1)) = g(f(z_2))$, ce qui montre que $z_1 = z_2$ car $(g \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in A$. Ainsi f est injective et donc bijective.
La fonction réciproque de f satisfait alors $f^{-1}(y) = f^{-1}((f \circ g)(y)) = (f^{-1} \circ f)(g(y)) = g(y)$ pour tout $y \in B$ et donc $f^{-1} = g$.

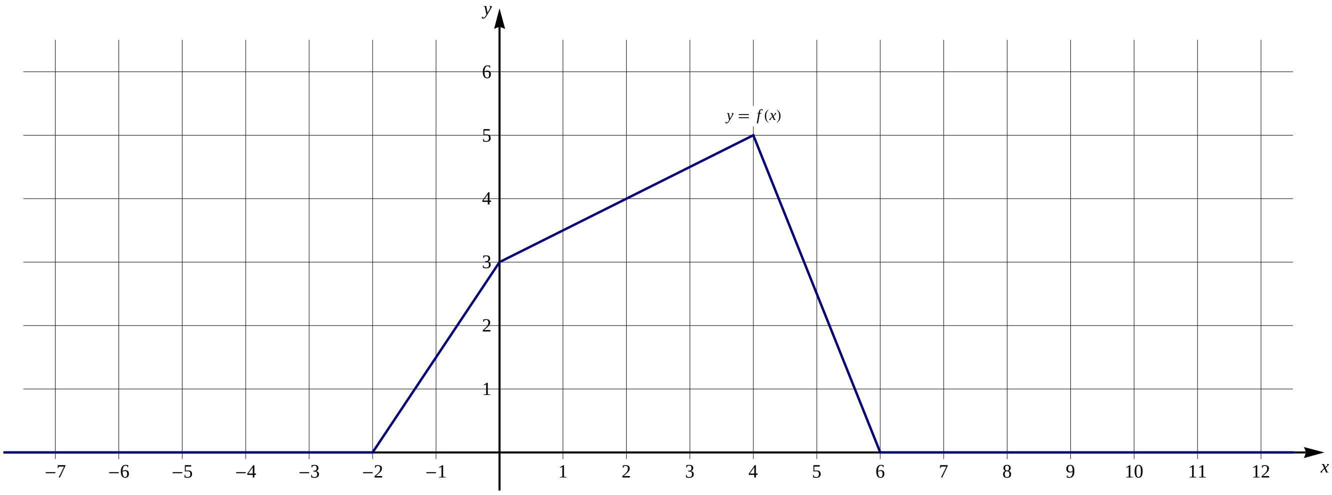
b) Comme f est bijective sur $\mathbb{R}$, sa fonction réciproque f^{-1} est bien définie sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$f^{-1}(-y) = x \quad \overset{f(\cdot)}{\Leftrightarrow} \quad -y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = -f(x)$$
$$\overset{f\ \text{impaire}}{\Leftrightarrow} \quad y = f(-x) \quad \overset{f^{-1}(\cdot)}{\Leftrightarrow} \quad f^{-1}(y) = -x \quad \Leftrightarrow \quad -f^{-1}(y) = x\,.$$

Ainsi on a bien montré que $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$, c'est-à-dire que f^{-1} est aussi impaire.

Exercice 8. (Transformations affines)

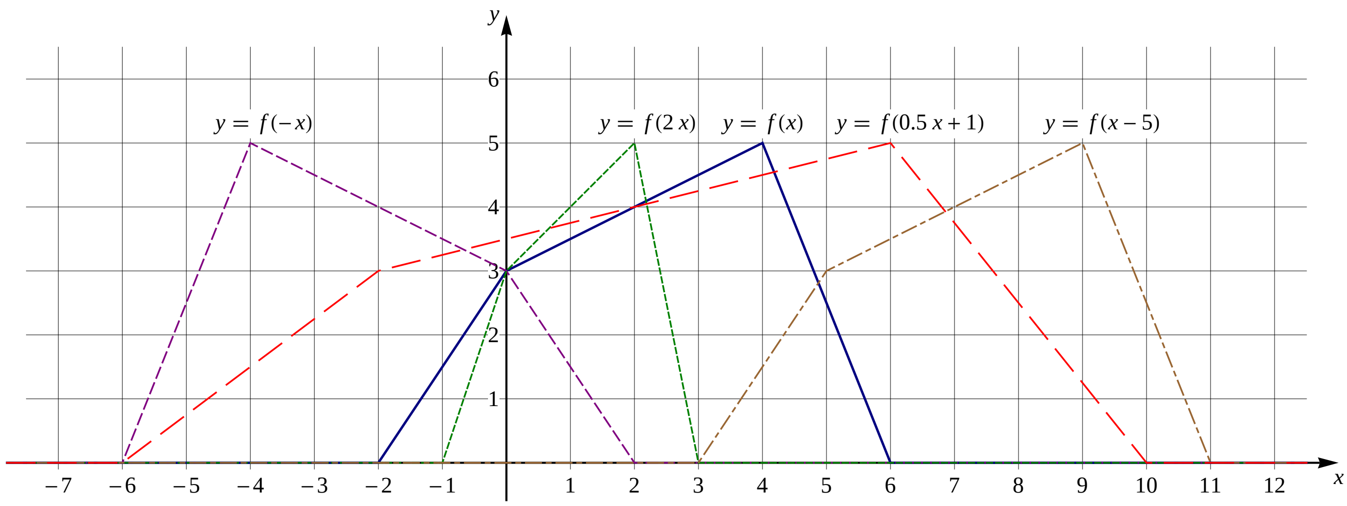
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction représentée ci-dessous.



Tracer sur la même figure les graphes des fonctions $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

a) $g(x) = f(-x)$ b) $g(x) = f(x-5)$ c) $g(x) = f(2x)$ d) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

Sol.:



Exercice 9. (Composition de fonctions)

Pour les deux fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$:

a) $$f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} |2x-1|, & x \geq -1 \\ -x(x+2), & x < -1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-4}, & x \geq 4 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & x < 4 \end{cases}$$

Sol.:

a) Pour calculer $f \circ g$, il faut déterminer les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geq 0$ et $g(x) < 0$ respectivement et puis appliquer l'expression correspondante de f au résultat $g(x)$.
On a $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x+2 \geq 0$ pour $x \geq -2$. Ainsi $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ et donc

$$(f \circ g)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2g(x)-3, & x \geq -2 \\ g(x), & x < -2 \end{array} \right\} = \begin{cases} 2x^2-3, & x \geq 1 \\ 2x+1, & -2 \leq x < 1 \\ x+2, & x < -2 \end{cases}$$

Le procédé pour $g \circ f$ est similaire. Comme $2x-3 \geq 1$ pour $x \geq 2$ et $f(x) < 0$ pour tout $x < 0$, on a $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$. Ainsi

$$(g \circ f)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)^2, & x \geq 2 \\ f(x)+2, & x < 2 \end{array} \right\} = \begin{cases} (2x-3)^2, & x \geq 2 \\ 2x-1, & 0 \leq x < 2 \\ x+2, & x < 0 \end{cases}$$

b) Calcul de $f \circ g$:
Pour $x \geq 4$ on a

$$-\sqrt{x-4} \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x-4 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq x \leq 5$$

et pour tout $x < 4$ on a $1 - \frac{1}{2}x \geq -1$. Ainsi $g(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 5$ et donc

$$(f \circ g)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} |2g(x)-1|, & x \leq 5 \\ -g(x)\big(g(x)+2\big), & x > 5 \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} |1-x|, & x < 4 \\ \big| -2\sqrt{x-4}-1 \big|, & 4 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{x-4}-x+4, & x > 5 \end{array} \right\} = \begin{cases} |1-x|, & x < 4 \\ 2\sqrt{x-4}+1, & 4 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{x-4}-x+4, & x > 5 \end{cases}$$

Calcul de $g \circ f$:
Pour $x \geq -1$, on a

$$|2x-1| \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1 \geq 4 \ \text{ ou } \ 2x-1 \leq -4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{5}{2} \qquad (\text{car } x \geq -1)$$

et pour $x < -1$ on a $-x(x+2) \geq 4 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x+4 \leq 0$, ce qui est impossible car le polynôme n'a pas de racines réelles. Ainsi $f(x) \geq 4 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{5}{2}$ et donc

$$(g\circ f)(x) = \begin{cases} -\sqrt{f(x)-4}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1-\frac{1}{2}f(x), & x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} -\sqrt{|2x-1|-4}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1-\frac{1}{2}|2x-1|, & -1 \leq x < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x^2+x+1, & x < -1 \end{array}\right\} = \begin{cases} -\sqrt{2x-5}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1-\frac{1}{2}|2x-1|, & -1 \leq x < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x^2+x+1, & x < -1 \end{cases}$$

Exercice 10. (V/F : Propriétés de fonctions)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

	V	F
a) Si f est strictement monotone , alors f est injective.	☐	☐
b) Si f est injective, alors f est monotone.	☐	☐
c) Si f est bijective et croissante, alors son inverse f^{-1} est décroissante.	☐	☐
d) Si $f \circ g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes.	☐	☐

Sol.:

a) VRAI.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$. Si f est strictement croissante, on a $f(x_1) < f(x_2)$ et si f est strictement décroissante, on a $f(x_1) > f(x_2)$. Dans les deux cas $f(x_1) \neq f(x_2)$, c.-à-d. f est injective.

b) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = 2[x] - x + 1$. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors

$$\begin{aligned} 2[x_1] - x_1 + 1 = 2[x_2] - x_2 + 1 \quad &\Rightarrow \quad 2([x_1] - [x_2]) = x_1 - x_2 \\ &\Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 2k \quad \textit{avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2 + 2k) &= 2[x_2 + 2k] - (x_2 + 2k) + 1 \\ &= 2([x_2] + 2k) - (x_2 + 2k) + 1 \\ &= 2[x_2] + 2k - x_2 + 1 = f(x_2) + 2k. \end{aligned}$$

Or, $f(x_1) = f(x_2)$ par hypothèse, si bien que $k = 0$ et donc $x_1 = x_2$. Ainsi f est bien injective. Mais f n'est pas monotone parce qu'on a par exemple $f(0) = 1 > f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, mais $f(0) = 1 < f(1) = 2$. En fait, f est monotone (strictement décroissante) sur chacun des intervalles $[k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, voir Fig. 12.

c) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = f^{-1}(x) = x$.

d) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = -x$. Alors $(f \circ g)(x) = -x$ est décroissante mais f ne l'est pas.

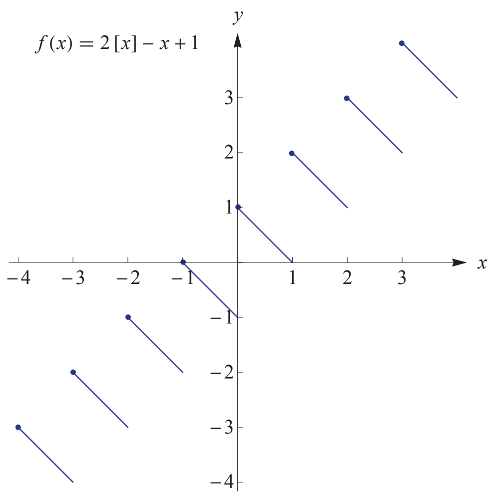


Figure 12 –