

Partie I : Limites supérieures et limites inférieures

Définition. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée. On définit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \min \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} : (a_{n_k})_{k \geq 1} \text{ est une s.s. convergente de } (a_n) \right\}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \max \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} : (a_{n_k})_{k \geq 1} \text{ est une s.s. convergente de } (a_n) \right\}$$

Exercice 1.

Pour toutes les suites (x_n) suivantes, calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

a) $x_n = \frac{2 + (-3)^n}{5 + 3^n}$

c) $x_n = 2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 3(-1)^n$

b) $x_n = \frac{\cos(\pi n)}{\frac{1}{2} + \cos(\frac{\pi n}{2})}$

d) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 2.

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ deux suites réelles bornées.

Vrai ou faux ?

a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = (\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n) + (\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n)$

b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = (\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n) \cdot (\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n)$

Partie II : Séries réelles

Exercice 3 (Série géométrique).

a) Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Démontrer la formule

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

b) Montrer que $\sum_{k=0}^n r^k$ converge si et seulement si $-1 < r < 1$, et dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}.$$

c) Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

d) Calculer $\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$.

Exercice 4.

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle.

Vrai ou faux ?

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

- d) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.
- e) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.
- f) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.
- g) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 5.

A l'aide des critères de convergence, déterminer si la série donnée converge ou diverge :

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5} \right)^n$ | d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ | g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$ |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ | e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+7} - n \right)$ | h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n}$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ | i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ |

Indication : Pour la série (f), utiliser l'égalité : $1 - \cos(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.

Étudier la convergence des séries suivantes en fonction de la valeur du paramètre $c \in \mathbb{R}$.

- | | |
|--|--|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c} \right)^n$, (avec $c \neq 1$) | c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right) \right)^n$ |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$ | d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$ |

Quelles sont les valeurs des séries (a) et (c) lorsqu'elles convergent ?

Exercices challenges.

Exercice 7.

- a) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle bornée et $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente vers $L > 0$. Démontrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Rappels :

- La limite d'un produit de deux suites convergentes est le produit des limites.
- Si une suite converge, alors toutes ses sous-suites convergent vers la même limite.

- b) En déduire $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ pour

$$x_n = \left(\frac{2n^2 - 2}{n^2 + n} \right) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Exercice 8.

Le but de cet exercice est de montrer que la série harmonique diverge, c-à-d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

On propose de procéder de la façon suivante. Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Considérer la sous suite $(S_{n_j})_{j \geq 1} \subset (S_n)$ donnée par $n_j = 2^j$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $j \geq 1$,

$$S_{n_j} = 1 + \sum_{m=1}^j \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k}$$

(Pour mieux visualiser, commencez par écrire S_{n_1} , S_{n_2} et S_{n_3} .)

b) En utilisant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{m-1} + 1 \leq k \leq 2^m$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^m}$, montrer que

$$S_{n_j} \geq 1 + \frac{j}{2}.$$

c) En déduire que $\lim_{j \rightarrow \infty} S_{n_j} = +\infty$ et donc (S_n) diverge.

Solutions.

- | | | | | |
|----|----------------------|----------------------|------------------------------|--------------|
| 1. | a) $-1, 1$ | b) $-2, \frac{2}{3}$ | c) $-\sqrt{3}-3, \sqrt{3}+3$ | d) 0 |
| 2. | a) FAUX | | b) FAUX | |
| 3. | c) 1 | | d) $\frac{1}{12}$ | |
| 4. | a) VRAI | c) VRAI. | e) FAUX. | g) FAUX. |
| | b) FAUX. | d) FAUX. | f) VRAI. | |
| 5. | a) Converge | d) Diverge | g) Diverge | |
| | b) Converge | e) Diverge | h) Converge | |
| | c) Converge | f) Converge | i) Diverge | |
| 6. | a) $c < \frac{1}{2}$ | b) $ c < 1$ | c) $c \neq 2k+1$ | d) $ c < e$ |