Corrigé série 7

Exercice 1 (5 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$

b) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{x-a} = 3a^2$

c) Supposons $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour un $n > 0$. Alors, avec la formule de la dérivée d'un produit,

$$(x^{n+1})' = (x^n x)' = (x^n)'x + x^n x' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

Exercice 2 (5 points)

En utilisant une formule trigonométrique et le fait que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} \\ &= -\lim_{x\to a} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = -\sin(a).\end{aligned}$$

En utilisant ce résultat et $(\sin(x))' = \cos(x)$, on peut calculer avec la formule de la dérivée d'un quotient,

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Ainsi,

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

De manière similaire, on trouve

$$(\cot(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x).$$

Le domaine de définition de la fonction cos et de sa dérivée est $\mathbb{R}$.

Le domaine de définition de la fonction tan et de sa dérivée est $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Le domaine de définition celui de la fonctioncot et de sa dérivée est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3 (5 points)

a) Faux. $f(x) = -x$.

b) Faux. $f(x) = (x - 1/2)^2$.

c) Faux. $f(x) = |x - 1/2|$.

d) Vrai. Soit d donné par l'équation $y = ax$, avec $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = ax$ satisfait à la condition.

e) Vrai. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ a pour dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ puisque, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suffisamment proche de a pour que $x - a > 0$, on a

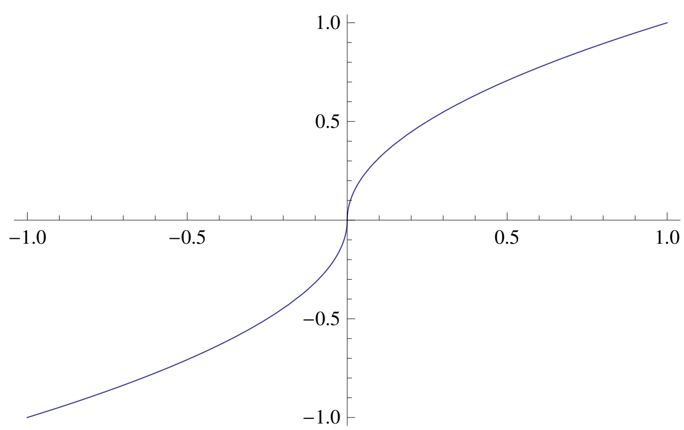
$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

La tangente de $f(x)$ en $x = 0$ est donc bien la droite verticale passant par l'origine.

Pour avoir une fonction définie sur tous les réels, on peut l'étendre avec

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le graphe de la fonction est alors



f) Il suffit de considérer la fonction $x \mapsto |x|$ pour voir qu'une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

Par contre, toute fonction dérivable est continue.

En effet, soit f une fonction réelle dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$ fixé, nous voulons trouver un $\delta > 0$ tel que

$$f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \subseteq [f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon].$$

Comme
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0),$$
on a que pour tout choix de $\epsilon'>0$, il existe $\delta'>0$ tel que
$$|h|\le\delta' \qquad\Longrightarrow\qquad \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|\le\epsilon'$$
Posons $\epsilon'=1$; on a donc que, pour tout $|h|\le\delta'$,
$$|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h|\le h.$$
Or, avec l'inégalité du triangle inverse (démontrée dans une série précédente),
$$\begin{aligned}|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h| &\ge ||f(x_0+h)-f(x_0)|-|f'(x_0)h||\\ &\ge |f(x_0+h)-f(x_0)|-|f'(x_0)h|.\end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $|h|\le\min\left(\delta',\frac{\epsilon}{1+|f'(x_0)|}\right)$,
$$\begin{aligned}|f(x_0+h)-f(x_0)| &\le h+|f'(x_0)h|\\ &\le \frac{\epsilon}{1+|f'(x_0)|}+|f'(x_0)|\frac{\epsilon}{1+|f'(x_0)|}\\ &=\epsilon.\end{aligned}$$

Exercice 4 (10 points)

a) $f'(x)=10$ et $g'(x)=9x^8+8x^7+1$

b) $f'(t)=(t^{-1})'=-1\cdot t^{-2}=-\dfrac{1}{t^2}$ et $g(t)'=(2t^{-2})'=2\cdot(-2)\cdot t^{-3}=-4t^{-3}=-\dfrac{4}{t^3}$

c) $f'(y)=(y^{\frac12})'=\dfrac12 y^{-\frac12}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ et $g'(y)=(y^{\frac13})'=\dfrac13 y^{-\frac23}=\dfrac{1}{y^{\frac23}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$

d) $f'(u)=((u+5)(u+5))'=1\cdot(u+5)+(u+5)\cdot 1=2(u+5)$ et
$$g'(u)=2(u+5)\cdot(u-3)+(u+5)^2\cdot 1=(u+5)(2(u-3)+u+5)=(u+5)(3u-1)$$

e) $f'(x)=\dfrac{2\cdot(x-5)-(2x-3)\cdot 1}{(x-5)^2}=\dfrac{2x-10-2x+3}{(x-5)^2}=\dfrac{-7}{(-5+x)^2}$ et
$$g'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

f) $f'(x) = 6x^2 + (5x^{-7})' = 6x^2 - 35x^{-8} = 6x^2 - \dfrac{35}{x^8}$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(3x^2-2)\cdot(2-x^2)-(x^3-2x)(-2x)}{(2-x^2)^2} = \frac{6x^2-3x^4-4+2x^2+2x^4-4x^2}{(2-x^2)^2} \\ &= \frac{-x^4+4x^2-4}{(2-x^2)^2} = \frac{-(x^4-4x^2+4)}{(2-x^2)^2} = \frac{-(x^2-2)^2}{(2-x^2)^2} = -1 \end{aligned}$$

Exercice 5 (5 points)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Comme $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$, la dérivée d'une fonction quelconque n'est, en général, pas dérivable.

Exercice 6 (10 points)

a) Les deux points d'intersection sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$. En $(0, 0)$, les deux fonctions ont leur dérivée nulle, l'angle entre leur courbe est donc zéro en ce point.
Pour le deuxième point, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$, on a $f'(1) = 2$ et $g'(1) = 3$, donc

$$\alpha = \arctan\left|\frac{2-3}{1+2\cdot 3}\right| = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \cong 0,142$$

b) L'équation $x^2 - 2x = \frac{1}{2}x$ conduit aux solutions $x = 0$ et $x = \dfrac{5}{2}$.
Ainsi, on calcule, avec $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}x$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arctan\left|\frac{f'(0)-g'(0)}{1+f'(0)\cdot g'(0)}\right| = \arctan\left|\frac{-2-1/2}{1+(-2)\cdot 1/2}\right| = \arctan\left(\frac{5/2}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \alpha_2 &= \arctan\left|\frac{f'(5/2)-g'(5/2)}{1+f'(5/2)\cdot g'(5/2)}\right| = \arctan\left|\frac{3-1/2}{1+3\cdot(1/2)}\right| = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

c) L'équation $\tan(x) = 1$ conduit aux solutions $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Etant donné la périodicité des fonctions en jeu, on peut se contenter d'étudier les cas

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{5\pi}{4}.$$

On a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arctan\left|\frac{f'(\pi/4)-g'(\pi/4)}{1+f'(\pi/4)\cdot g'(\pi/4)}\right| \cong \arctan\left(\frac{1,41}{0,5}\right) \cong 1,23 \\ \alpha_2 &= \arctan\left|\frac{f'(5\pi/4)-g'(5\pi/4)}{1+f'(5\pi/4)\cdot g'(5\pi/4)}\right| =\cong \arctan\left(\frac{1,41}{0,5}\right) \cong 1,23 \end{aligned}$$

Exercice 7 (5 points)
Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Alors $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ et on a le système d'équations

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 1 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution $a = -3$ et $b = 3$.

Exercice 8 (5 points)
Il faut déterminer m tel que $f'(0) = -\dfrac{20}{9}$.
Comme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + m - 2)(x^2 - 2y - 3) - (x^2 + (m-2)x - 10)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x + (m-2)x^2 - 2(m-2)x - 3(m-2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &\qquad + \frac{-2x^3 + 2x^2 - 2(m-2)x^2 + 2(m-2)x + 20x - 20}{(x^2 - 2x - 3)} \\ &= \frac{-mx^2 + 14x - 14 - 3m}{(x^2 - 2x - 3)^2}, \end{aligned}$$

on a l'équation

$$\frac{-14 - 3m}{9} = -\frac{20}{9}$$

qui a pour solution

$$m = 2.$$

Exercice 9 (5 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a). \end{aligned}$$

Exercice 10 (10 points)

Dans cette exercice, nous proposons à chaque fois deux solutions :

La première avec la définition usuelle de la dérivée vue en cours : $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

La deuxième avec l'autre définition de la dérivée $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

a) Première version : On utilise le changement de variables $y = -x$ (et si $-y \to -a$, alors $y \to a$)

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{x \to -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x + a} = \lim_{y \to a} \frac{f(-y) - f(-a)}{-y + a} = \lim_{y \to a} \frac{f(y) - f(a)}{-(y - a)} \\ &= -\lim_{y \to a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = -f'(a). \end{aligned}$$

Deuxième version :

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(-x)}{-h} = -f'(x). \end{aligned}$$

b) Première version : On utilise le changement de variables $y = -x$

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{x \to -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x + a} = \lim_{y \to a} \frac{f(-y) - f(-a)}{-y + a} = \lim_{y \to a} \frac{-f(y) + f(a)}{-y + a} \\ &= \lim_{y \to a} \frac{-(f(y) - f(a))}{-(y - a)} = \lim_{y \to a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(a). \end{aligned}$$

Deuxième version :

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x). \end{aligned}$$

c) Soit $P \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ la période.

Première version : On utilise le changement de variables $y = x - P$ (et si $y + P \to a + P$, alors $y \to a$)

$$\begin{aligned} f'(a+P) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a+P)}{x - (a+P)} = \lim_{y \to a} \frac{f(y+P) - f(a+P)}{y + P - (a+P)} \\ &= \lim_{y \to a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(a). \end{aligned}$$

Deuxième version :

$$\begin{aligned} f'(x+P) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h+P) - f(x+P)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$