Rappels : $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ continues et dérivables sur $]a;b[$.

- Thm de Rolle : si $f(a) = f(b)$, $\exists\, c \in]a;b[$ t.q. $f'(c) = 0$
- TAF : TAF généralisé lorsque $g(x) = x$
- TAF généralisé : si g' ne s'annule pas sur $]a;b[$, alors $\exists\, c \in]a;b[$ t.q. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

IV. Etude de fonctions

Dans ce cours, nous allons démontrer le théorème de Bernoulli-L'Hospital, puis étudier la convexité du graphe d'une fonction réelle à l'aide de la dérivée seconde.
Pour terminer, nous donnerons le plan général d'une étude complète de fonctions.

1 La règle de Bernoulli-L'Hospital

La démonstration de cette règle de calcul que nous verrons aujourd'hui se base sur le théorème des accroissements finis généralisé.

Théorème 1.1. de Bernoulli-L'Hospital.
Soient $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues définies sur un intervalle semi ouvert et dérivables en tout point de $]a, b[$.
On suppose de plus que g' ne s'annulent en aucun point de $]a, b[$ et que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Alors, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu$$

Démonstration. Nous effectuons la preuve dans le cas où $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$.

Dans ce cas, on prolonge f et g par continuité en a en posant $f(a) = g(a) = 0$.

Par le théorème des accroissements finis généralisés, on sait que $\forall x \in]a;b[$,

$$\exists\, c = c_x \in]a;x[\quad \text{t.q.} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Lorsque x tend vers a par la droite, c_x tend aussi vers a car $a < c_x < x$ (Thm des gendarmes)

Ainsi,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \mu \qquad \square$$

Le résultat est cité ici avec une limite à droite, mais il est bien sûr valide pour les limites à gauche, et donc pour les limites absolues.

Les cas où $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$ sont légèrement plus délicats et les élèves intéressés peuvent en trouver une preuve complète dans la plupart des livres d'analyse, par exemple "Calcul différentiel et intégral" de Douchet et Zwahlen.

Exemple 1.2. Calculons la limite du quotient $\dfrac{3x + \cos x}{\sqrt{x^2+1}}$ lorsque x tend vers l'infini. Numérateur et dénominateur tendent vers l'infini et nous devons lever cette indétermination. Si nous appliquons la règle de Bernoulli-L'Hospital, nous calculons le quotient des dérivées :

$$\frac{(3x+\cos x)'}{(\sqrt{x^2+1})'} = \frac{3 - \sin(x)}{\dfrac{1 \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\overset{u}{(3-\sin(x))}\overset{v}{\sqrt{x^2+1}}}{x}$$

Il y a à nouveau une indétermination et on calcule une seconde fois le quotient des dérivées :

$$-\cos(x)\cdot\sqrt{x^2+1} + (3-\sin(x))\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-\cos(x)(x^2+1) + x(3-\sin(x))}{\sqrt{x^2+1}}$$

La situation ne s'est pas simplifiée et le terme $(x^2+1)\cdot\cos x$ oscille entre des valeurs de plus en plus grandes alternativement positives et négatives... Appelons les gendarmes pour calmer la situation.

Reprenons notre quotient : $\dfrac{3x+\cos x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$

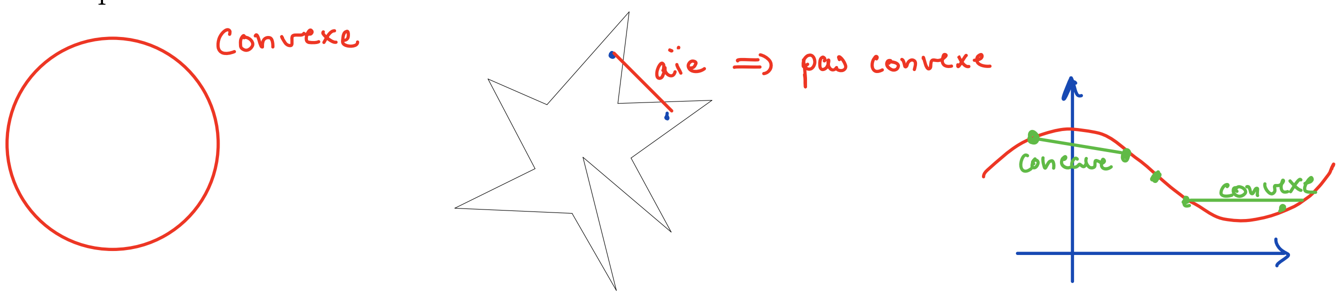
Or, $0 \le \left|\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x^2+1}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow{x \to \infty} 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+\cos x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -3$.

2 Convexité et concavité

Un sous-ensemble A de points du plan est dit *convexe* si le segment qui relie deux points quelconques de A est entièrement contenu dans A. Ainsi un disque est convexe, alors qu'un polygone étoilé ne l'est pas :



Ceci motive la définition de convexité pour des fonctions réelles.

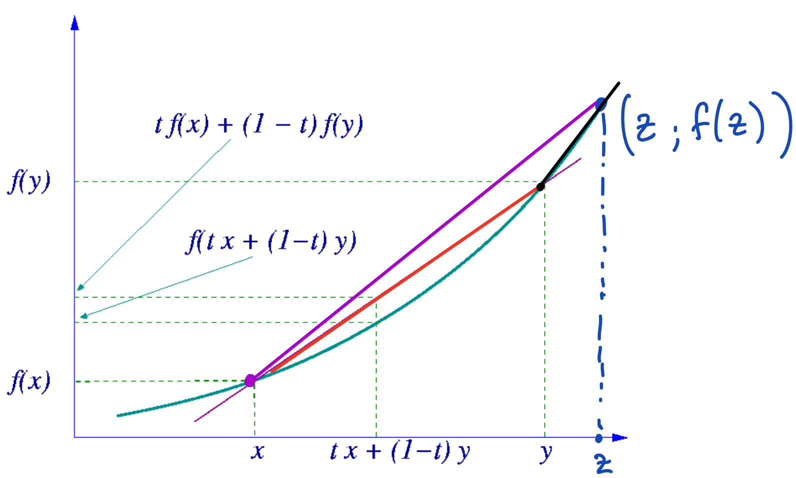
Définition 2.1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est *convexe* sur l'intervalle $[a,b]$ si, pour toute paire de points x et y compris entre a et b et tout nombre réel $0 \leq t \leq 1$, on a

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leq t\,f(x) + (1-t)\,f(y)$$

La fonction est dite *concave* sur $[a,b]$ si

$$f\big(y - t(y-x)\big) = f\big(tx + (1-t)y\big) \geq t\,f(x) + (1-t)\,f(y) = f(y) - t\big(f(y) - f(x)\big)$$

Que signifie cette définition ? Lorsque t parcourt tous les nombres réels compris entre 0 et 1, la combinaison linéaire $tx + (1-t)y$ parcourt tous les nombres réels entre x et y. Le segment reliant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est formé des points $P_t = (\, tx+(1-t)y\, ;\, tf(x)+(1-t)f(y)\,)$ avec $t \in [0;1]$.



Ainsi la fonction f est convexe si tout point du graphe de f est situé sous le segment reliant $(x\,;f(x))$ à $(y\,;f(y))$

De plus, par symétrie d'axe Ox, f est concave $\Leftrightarrow$ $-f$ est convexe.

Exemple 2.2. La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur tout $\mathbb{R}$. En effet, pour $x < y$ et $0 \le t \le 1$,
$f(t\,x + (1-t)\,y) - t\,f(x) - (1-t)\,f(y) = (tx + (1-t)y)^2 - tx^2 - (1-t)y^2$

$= t^2x^2 + 2t(1-t)x\cdot y + (1-t)^2y^2 - tx^2 - (1-t)y^2$

$= \underbrace{(t^2-t)}_{=t(t-1)}x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)(\cancel{1}-t-\cancel{1})y^2$

$= t(t-1)(x^2 - 2xy + y^2) = \underbrace{t}_{\geqslant 0}\underbrace{(t-1)}_{\leqslant 0}\underbrace{(x-y)^2}_{\geqslant 0} \leqslant 0$

Donc $f(x) = x^2$ est bel et bien convexe.

Le résultat était attendu dans ce cas : puisque le coefficient devant x^2 est positif, la parabole représentant la fonction est convexe.

Lemme 2.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors si $a \le x < y < z \le b$, on a*

$$\boxed{\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \le \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.}$$

Démonstration. Remarquons que si $t = \dfrac{z-y}{z-x}$, alors $1 - t = \dfrac{z - x - (z - y)}{z - x} = \dfrac{y - x}{z - x}$.
D'autre part, $t \in [0;1]$ car $x < y < z$

$$tx + (1-t)z = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z = \frac{zx - yx + yz - xz}{z-x} = y$$

Par définition de convexité, on sait alors que $f(y) \le \dfrac{z-y}{z-x}f(x) + \dfrac{y-x}{z-x}f(z)$.
Divisons cette inégalité par $y - x$:

$$\frac{f(y)}{y-x} \le \frac{z-y}{(y-x)(z-x)}f(x) + \frac{1}{z-x}f(z) = \frac{z-x}{(y-x)(z-x)}f(x) + \frac{x-y}{(y-x)(z-x)}f(x) + \frac{1}{z-x}f(z)$$

Une soustraction de $\dfrac{f(x)}{y-x}$ nous permet d'obtenir $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$. □

Proposition 2.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors,*
f est continue et admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite.
De plus, si $x < y$ et que la dérivée existe en ces points, alors $f'(x) \leq f'(y)$.

Démonstration. Voyons d'abord pourquoi f est continue sans entrer dans les détails des ε et δ. Fixons x et considérons deux suites monotones $x_n < x$ et $y_n > x$ qui tendent toutes deux vers x.

$$(x_n) \rightarrow x \leftarrow (y_n)$$

Définissons $m = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ et $M = \dfrac{f(y_0) - f(x)}{y_0 - x}$. Le lemme précédent garantit que

$$m \leq \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \leq \frac{f(x_{n+1}) - f(x)}{x_{n+1} - x} \leq \frac{f(y_{n+1}) - f(x)}{y_{n+1} - x} \leq \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \leq M.$$

car $x_0 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n \leqslant y_0$

Lorsque $n \to \infty$, les dénominateurs tendent vers 0 et comme les fractions sont bornées, car comprises entre m et M, les numérateurs tendent aussi vers 0. Donc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x)$$ et f est bien continue en x.

De plus, la dérivée à gauche en x vaut $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}$ qui existe puisque c'est une suite croissante en majorée par M.

On utilise le même argument pour montrer que la dérivée à droite existe et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x)}{y_n - x}$.

Finalement, si $x < y$ et c est un nombre quelconque compris entre x et y, les inégalités

$$f'(x) = f'_d(x) \xleftarrow{c \to x} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(c) - f(y)}{c - y} \xrightarrow{c \to y} f'_g(y) = f'(y)$$

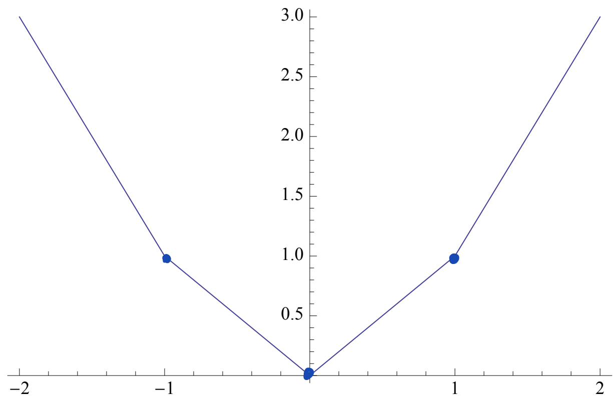
montrent que $f'_d(x) \leq f'_g(y)$ et donc que $f'(x) \leq f'(y)$ puisqu'on suppose ici que la dérivée existe. □

La proposition ci-dessus dit que les dérivées à droite et à gauche existent, elle ne dit pas qu'elles coïncident ! Une version plus générale dit de fait que la dérivée à gauche est toujours plus petite que celle à droite.

Exemple 2.5. On définit une fonction f "par morceaux" sur l'intervalle $[-2,2]$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Son graphe est visiblement convexe, même si la démonstration pourrait être fastidieuse :



On voit que les dérivées à gauche et à droite ne coïncident pas en -1, 0 et 1.

La conséquence la plus importante de la proposition précédente s'obtient dans le cas où on suppose que la fonction étudiée est dérivable.

Théorème 2.6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors*

f est convexe si et seulement si la dérivée $f'(x)$ est une fonction croissante.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est convexe et dérivable, la dérivée est croissante, nous venons de le démontrer.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons donc que la dérivée est croissante. Pour montrer que f est convexe, nous allons travailler directement avec la définition.
Fixons donc $x < y$ et un nombre $0 \leq t \leq 1$ et posons $u = t\,x + (1-t)\,y$.
Le Théorème des accroissements finis garantit l'existence de $c \in]x,u[$ et $d \in]u,y[$ tels que

$$f'(c) = \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \quad \text{et} \quad f'(d) = \frac{f(y)-f(u)}{y-u}$$

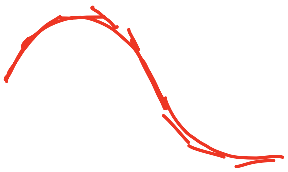
donc $f(x) = f(u) - (u-x)\,f'(c)$ et $f(y) = f(u) + (y-u)\,f'(d)$

De plus, comme $c < d$, et qu'on suppose f' croissante, $f'(c) \leq f'(d)$

Ainsi, $t\,f(x) + (1-t)\,f(y) \;=\; \cancel{t\,f(u)} - t\,(u-x)\,f'(c) + (1-\cancel{t})\,f(u) + (1-t)(y-u)\,f'(d)$

$$= f(u) - t\,(u-x)\,f'(c) + (1-t)(y-u)\,f'(d)$$

Par conséquent, puisque $u = tx + (1-t)\,y$,



$$\begin{aligned}
t\,f(x) + (1-t)\,f(y) &= f(u) - t\,(t\,x + (1-t)\,y - x)\,f'(c) + (1-t)(y - t\,x - (1-t)\,y)\,f'(d) \\
&= f(u) - t\,(1-t)(y-x)f'(c) + (1-t)t(y-x)f'(d) \\
&= f(u) + \underbrace{t(1-t)}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{\geq 0}\underbrace{(f'(d)-f'(c))}_{\geq 0 \text{ car } f' \text{ croissante}} \\
&\geq f(u) = f(tx + (1-t)\,y)
\end{aligned}$$

Ainsi, $t\,f(x) + (1-t)\,f(y) \geq f(t\,x + (1-t)\,y)$, donc f est convexe. □

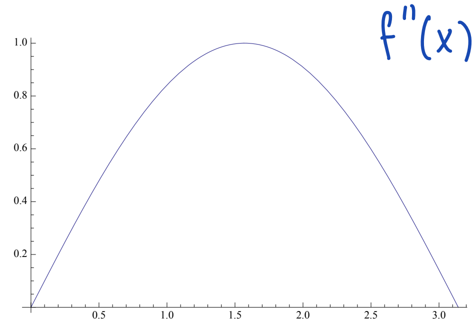
Grâce à notre étude de la croissance d'une fonction dérivable, nous obtenons immédiatement le critére de convexité suivant :

Corollaire 2.7. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois. Alors f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ sur $[a,b]$.*

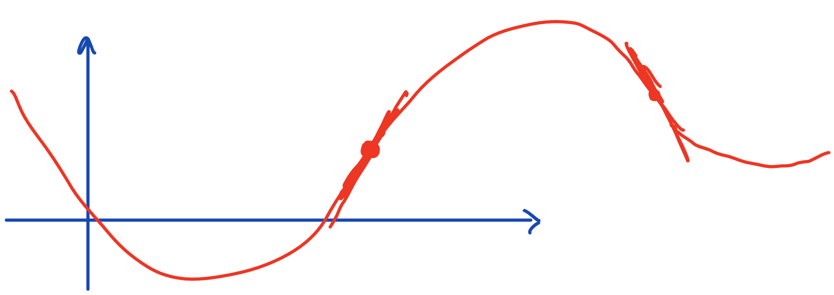
Exemple 2.8. La fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$ est concave car

$f'(x) = \cos(x)$ et

$f''(x) = -\sin(x) \leq 0$ si $0 \leq x \leq \pi$



Définition 2.9. Une fonction réelle f admet a comme *point d'inflexion* si f est convexe à gauche de a, puis concave à droite de a, ou inversément.



3 Etude de fonctions

Nous avons les clés en main pour effectuer l'étude complète d'une fonction réelle quelconque. Nous savons étudier le signe de la fonction, de sa dérivée et de sa dérivée seconde, et ainsi déterminer les intervalles de croissance, décroissance, convexité et concavité. La règle de base n'est pas de respecter coûte que coûte l'ordre des opérations, mais de penser *globalement* à l'étude de la fonction et de s'assurer que les résultats sont *cohérents*.

Voici le plan général d'une étude de fonction :

1. Déterminer le domaine de définition $D(f)$ et les points de discontinuité ;
2. Déterminer si la fonction est paire ou impaire, si elle est périodique (et quelle est la période) ;
3. Déterminer le signe de f ;
4. Calculer les limites aux points du bord de $D(f)$, en particulier en $\pm\infty$; en déduire s'il y a des asymptotes verticales et horizontales, en donner les équations ;
5. Déterminer l'existence d'asymptotes obliques, en donner les équations ;
6. Calculer la dérivée, son domaine de définition $D(f')$ et son signe ;
7. Calculer la dérivée seconde, son domaine de définition $D(f'')$ et son signe ;
8. Calculer les limites de la dérivée aux bord de $D(f')$;
9. Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' ;
10. Déterminer les extrema locaux de f et les points d'inflexion, ainsi que l'ordonnée à l'origine ;
11. Déterminer les intervalles de croissance, décroissance, convexité et concavité ;
12. Tracer le graphe de f ;
13. Etablir d'autres symétries que la parité s'il y a lieu.

Exemple 3.1. Nous étudions la fonction $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

— Domaine de définition :

$$(x^3 - x^2) + (x - 1) = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

$$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Mais $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}\, 4x}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)} = \dfrac{4}{2} = 2$ et on prolonge la fonction par continuité en posant $f(1) = 2$.

Nous étudions donc la fonction $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

Cette fonction est visiblement impaire et elle ne s'annule qu'en 0. $\big(g(-x) = -g(x)\big)$

— Signe de $g(x)$ = signe de $4x$

x		0	
g	$-$	0	$+$

— AV : $\emptyset$ car $ED_g = \mathbb{R}$

— AH :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2+1} \overset{\frac{\infty}{\infty} \to B.H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{4}{2x} = 0. \text{ D'où AH : } y = 0$$

— AO : $\emptyset$ car AH.

— Dérivée :

$$g'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2} = \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

Signe de g' / croissance de g

x		-1		1	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	min $(-1\,;\, g(-1) = -2)$	$\nearrow$	max $(1\,;\,2)$	$\searrow$

— Dérivée seconde : $g'(x) = -4\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

$$g''(x) = -4\,\frac{2x(x^2+1)^2 - (x^2-1)\,2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= -4\,\frac{2x\cancel{(x^2+1)}\left[x^2+1-2(x^2-1)\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= -8\,\frac{x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 8\,\frac{x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 8\,\frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

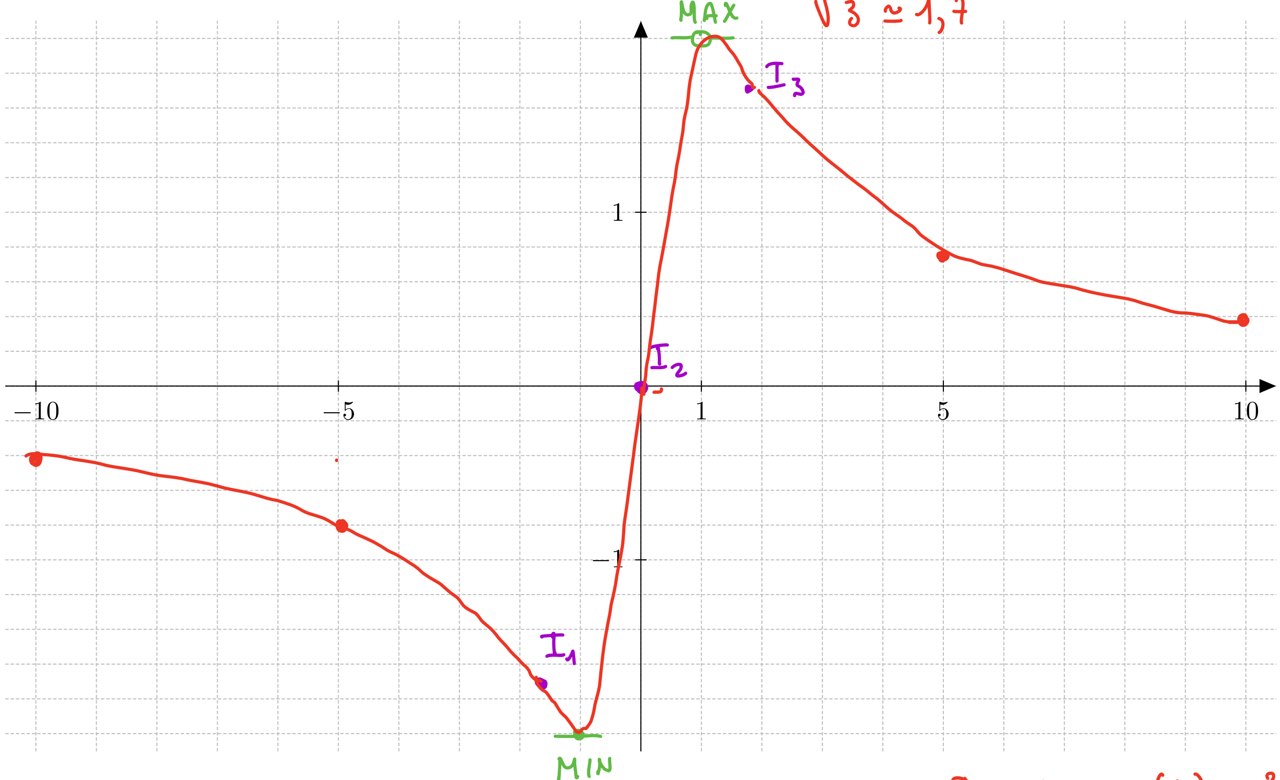
x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
g''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\frown$	Infl $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$	$\smile$	Infl $(0;0)$	$\frown$	Infl $(\sqrt{3};\sqrt{3})$	$\smile$

On pose :
Infl = Inflexion

$g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

— Graphe : def .

$\sqrt{3} \simeq 1{,}7$



De plus $g(5) = \dfrac{20}{26} \simeq 0{,}77$

et $g(10) = \dfrac{40}{101} \simeq 0{,}4$