Rmq : * Si $q = 1$, on ne peut rien conclure.

* On a toujours :

$$\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \liminf |a_k|^{1/k} \leq \limsup |a_k|^{1/k} \leq \limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| .$$

(on en déduit que le critère de Cauchy est plus fin).

Exemples :

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3k-5}{4k+5}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{3k-5}{4k+5}\right| = \frac{3}{4} = q$$

Comme $q<1$, par le critère de Cauchy, la série converge absolument.

fin 17/10

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}+(-1)^k\frac{1}{4}\right)^k}_{a_k}$

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2}+(-1)^k\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = q$$

Comme $q<1$, par le critère de Cauchy version lim-sup la série converge absolument.

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left((3+k)^{1/2}-(2+k)^{1/2}\right)^k}{k^{-k/2}}$

On a $$|a_k|^{1/k} = \frac{\sqrt{3+k}-\sqrt{2+k}}{k^{-1/2}} \times \underbrace{\frac{\sqrt{3+k}+\sqrt{2+k}}{\sqrt{3+k}+\sqrt{2+k}}}_{\text{quantité conjuguée}}$$

$$= \frac{\sqrt{k}\,\left((3+k)-(2+k)\right)}{\sqrt{3+k}+\sqrt{2+k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{k}}+\sqrt{1+\frac{2}{k}}}$$

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{k}}+\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{k}}} = \frac{1}{2} = q$$

Comme $q<1$, par le critère de Cauchy la série converge absolument.

4.3 Séries avec un paramètre (exemples)

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{b^k}$ où $b \in \mathbb{R}^*$ un paramètre

→ La convergence dépend du paramètre b.

Etudions le critère de D'Alembert :

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{|b|^{n+1}} \cdot \frac{|b|^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|b|} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{|b|} = q$$

- Si $|b| > 1$ alors $q < 1$ la série converge absolument.
- Si $|b| < 1$ alors $q > 1$ la série diverge
- Si $|b| = 1$ on ne peut pas conclure avec ce critère.

→ Si $b = 1$: la série est $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$

→ Si $b = -1$: la série est $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2$ (on utilise $\frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k$)

Ces séries divergent car le terme général ne converge pas vers 0.

2) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$ où $x \in \mathbb{R}$ un paramètre ($0! = 1$ et $x^0 = 1$ par convention).

Critère de D'Alembert, si $x \neq 0$:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 = q$$

Donc la série converge absolument pour tout $x \neq 0$.

Pour $x = 0$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1$ (la série converge absolument, trivialement).

En fait $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$ (voir plus tard)

En particulier : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \exp(1) = e \simeq 2,71 \ldots$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Chapitre 5 : fonctions réelles d'une variable réelle

On s'intéresse aux fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.

<u>Convention</u> : si le domaine D n'est pas précisé, par convention D est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression de f est bien définie

Exemple : $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2} \rightsquigarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

<u>Fonctions polynômes</u> : $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ donnés.

$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (convention $x^0 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

$D = \mathbb{R}$

<u>Fonctions rationnelles</u> : $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des polynômes

$D = \{x \in \mathbb{R} ;\ q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} ;\ q(x) = 0\}$.

privé de

5.1 Monotonie

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ (avec $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq 0$) est :

- croissante si $\forall x, y \in D$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- décroissante si $\forall x, y \in D$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- strictement croissante si $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- strictement décroissante si $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- (strictement) monotone si elle est, soit (strictement) croissante
  - soit (strictement) décroissante

<u>Critère d'injectivité</u> : Une fonction strictement monotone est injective.

Preuve : Soient $(x,y) \in D$ tels que $x \neq y$.

Si $x < y$ alors $\begin{cases} \text{soit } f(x) < f(y) \\ \text{soit } f(x) > f(y) \end{cases}$: dans les 2 cas $f(x) \neq f(y)$.

On traite de même le cas $x > y$. ■

5.2 Fonctions paires et impaires

Def : Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est dit symétrique (par rapport à zéro) ssi : $\forall x \in X$ on a $-x \in X$

Exemples :
- $[-1,2]$ ou $[-3,1]$ ne sont pas symétriques.
- $[-5,-2[\cup]2,5] \cup \{-1,1\}$ est symétrique.

Def : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est paire si D est symétrique et $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$

Exemples : $f(x) = x^2$, $|x|$, $\cos(x)$, a (pour $a \in \mathbb{R}$ fixé).

Def : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est impaire si D est symétrique et $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

Exemples : $f(x) = x^3$, $\frac{1}{x}$, $\sin(x)$, x

Remarque : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec D symétrique. Alors on peut écrire $f = f_p + f_i$ avec $f_p : D \to \mathbb{R}$ paire et $f_i : D \to \mathbb{R}$ impaire.
Pour trouver leurs expressions, on suppose que la décomposition existe et alors :

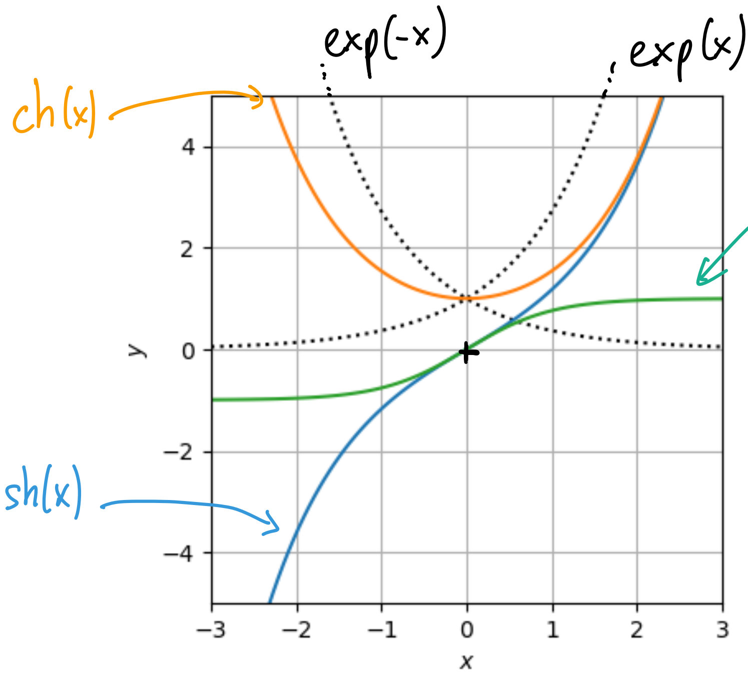
$\forall x \in D$,
$$\begin{cases} f(x) = f_p(x) + f_i(x) \\ f(-x) = f_p(x) - f_i(x) \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}}$$

(partie paire de f)
(partie impaire de f)

Exemple : fonctions $\underbrace{\text{sh (sinus hyperbolique)}}_{\text{partie impaire de exp}}$ et $\underbrace{\text{ch (cos hyperbolique)}}_{\text{partie paire de exp.}}$

$$f(x) = e^x = sh(x) + ch(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ sh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{cases}$$

Remarque : $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$ (le vérifier)



$th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

(étude des fonctions réciproques en exercices)

Thm (opérations sur les fonctions paires et impaires).

Soit p_1, p_2 des fonctions paires et i_1, i_2 des fonctions impaires définies sur un domaine symétrique D, et $f : D_f \to \mathbb{R}$ quelconque.

Alors : $p_1 + p_2$ est paire

$p_1 \cdot p_2$ est paire

$i_1 + i_2$ est impaire

(*) $i_1 \cdot i_2$ est paire

$p_1 \cdot i_1$ est impaire

(**) $i_1 \circ i_2$ est impaire

$f \circ p_1$ est paire

$p_1 \circ i_1$ est paire.

Preuve partielle :

(*) $\forall x \in D$, on a $(i_1 \cdot i_2)(-x) = i_1(-x) \cdot i_2(-x)$

$$= (-i_1(x)) \cdot (-i_2(x)) = i_1(x) \cdot i_2(x).$$

(**) $\forall x \in D$, on a $(i_1 \circ i_2)(-x) = i_1(i_2(-x))$

$$= i_1(-i_2(x))$$

$$= -i_1(i_2(x)) = -(i_1 \circ i_2)(x) \qquad \blacksquare$$

fin cours 28/10