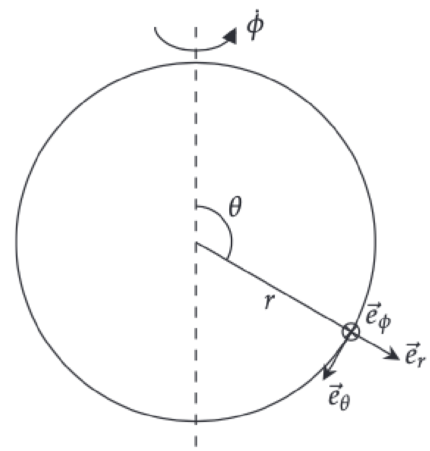
Série 07 : Energie et équilibre

1 Bille sur un anneau



Une bille est astreinte à se déplacer sur un anneau de rayon r tournant à une vitesse angulaire $\dot{\phi}$ constante autour d'un diamètre vertical. La position de la bille est entièrement déterminée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale.

a) Ecrire l'équation du mouvement de la bille selon l'axe $\vec{e}_\theta$.

b) Déterminer les positions d'équilibre θ_{eq}.

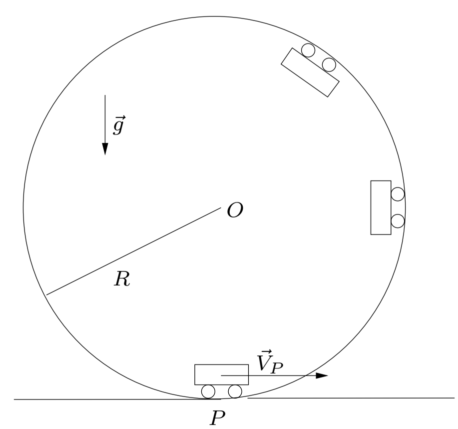
c) Ces positons d'équilibre sont-elles stables ? Si oui, déterminer la pulsation ω des petites oscillations autour de θ_{eq}.

Indication : Afin de déterminer le comportement des petites oscillations autour de θ_{eq}, on peut utiliser l'approximation suivante pour une fonction $f(x)$ autour d'un point x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f^{'}(x_0), \tag{1}$$

où $|x - x_0| << 1$.

2 Loop the loop



Un cascadeur tente de faire le tour d'un circuit vertical en forme de cercle de rayon R au volant de sa voiture de poids mg. Il entre dans le circuit au point P avec une vitesse $\vec{V}_P$ et on suppose qu'il se laisse ensuite tourner autour du circuit en roue libre sans appuyer ni sur l'accélérateur ni sur le frein. Il n'y a pas de frottement.

a) Ecrire les équations du mouvement de la voiture sur le cercle.

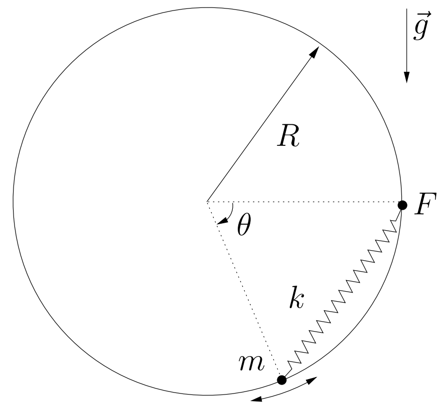
b) Exprimer l'énergie mécanique de la voiture en tout point de la piste circulaire, et montrer que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.

c) Calculer la force de réaction du circuit sur la voiture en fonction de la position de la voiture sur la piste circulaire et de sa vitesse d'entrée V_P.

d) Quelle est la vitesse minimale que doit avoir la voiture au point d'entrée P de la boucle pour réussir le looping sans décoller ?

3 Pendule perturbé par un ressort

Un point matériel de masse m est contraint à se déplacer sans frottement sur un cercle vertical de rayon R. Il est soumis à son poids et à la force d'un ressort qui le relie à un point fixe F sur la circonférence du cercle, situé à la même hauteur que le centre du cercle. Le ressort a une raideur k et une longueur à vide nulle.



a) Montrer que l'énergie potentielle du point matériel en fonction de θ s'écrit

$$E_{pot}(\theta) = -kR^2 \cos\theta - mgR\sin\theta + \text{constante}.$$

b) Montrer que les deux positions d'équilibre sont $\theta_{\text{eq},1} = \arctan\frac{mg}{kR}$ et $\theta_{\text{eq},2} = \arctan\frac{mg}{kR} + \pi$ et montrer que la première est stable mais pas la seconde.
Rappel : aux positions d'équilibre, la dérivée de l'énergie potentielle est nulle.

c) Calculer la pulsation des petites oscillations harmoniques autour d'une position d'équilibre stable.

d) Vérifier que les réponses aux questions b) et c) donnent les résultats attendus dans les deux cas limites définis par $k \to 0$ et $g \to 0$.

Indication : $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$ et $\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$

4 Saut à l'élastique

Une personne de masse m attachée à un élastique de constante k saute sans vitesse initiale du bord d'un pont à une hauteur h au-dessus d'une rivière. L'élastique empêche tout juste la personne de toucher la rivière. On néglige les frottements. On propose de définir un axe y pointant vers le haut et ayant son origine au niveau de la rivière.

a) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale, montrer que la longueur à vide l_0 de l'élastique est $l_0 = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$.

b) Montrer que, durant son saut, la personne atteint sa vitesse maximale à la position $y = h - l_0 - \frac{mg}{k}$.

Elements de réponse :

Exercice 1 :

— Les pulsations des petites oscillations sont : $\omega = \sqrt{g/r - \dot{\phi}^2}$ et $\omega = \dot{\phi}\sin\theta_{eq}$.

Exercice 2 :

— A partir de la conservation de l'énergie totale du système, on peut retrouver une des equations du mouvement :

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

— La voiture ne décolle pas si et seulement si $V_P > \sqrt{5gR}$