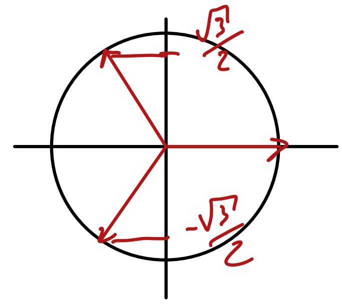
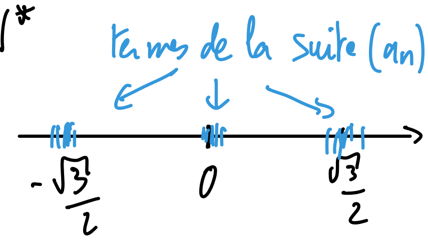
Exemple : Prenons la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot n\right) + \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n\geq 1$

On a $\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=3k,\ k\in\mathbb{N}^* \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } n=3k+1,\ k\in\mathbb{N}^* \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } n=3k+2,\ k\in\mathbb{N}^* \end{cases}$



• Donc $\underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{n}}_{\downarrow n\to\infty \ -\frac{\sqrt{3}}{2}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{n}}_{\downarrow n\to\infty \ \frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$



Donc $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \left(\leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

fin 14/10

En effet soit $b_n = \inf\{a_k ;\ k\geq n\}$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{n}$

définition de lim inf

Donc à la limite $\lim b_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Prenons $n_k = 3k+2$ et posons $u_k = a_{n_k} = a_{3k+2}$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

((u_k) est une sous-suite de (a_n))

On a $u_k = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^{3k+2}}{3k+2}$ et donc $\lim_{k\to\infty} u_k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comme $n_k \geq k$ on a $b_k \leq a_{n_k} = u_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Donc à la limite $\lim_{k\to\infty} b_k \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

• En conclusion, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (exercice : montrer $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Remarques :

* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ est le minimum de l'ensemble des points d'accumulation de (a_n).
* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ est le maximum ________

(admis)

* $\left(\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \ell\right) \iff (a_n)$ converge vers ℓ. (admis)
* En particulier si (a_n) converge vers ℓ alors ℓ est l'unique point d'accumulation.

Chap. 4 : séries (réelles)

Une série est la somme infinie de tous les termes d'une suite.

Notations : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite (réelle).

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

→ (S_n) est la suite des sommes partielles

→ les a_k sont appelés les termes de la série

Def : La série est dite convergente si la suite (S_n) converge.
La limite $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ est appelée la somme de la série.

Def : une série $\sum a_k$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ converge.

* Toute série absolument convergente est convergente.
* La somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes.

4.1 Exemples

Proposition : La série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

Preuve : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) On a $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \underbrace{n}_{\text{nb de termes de la somme}} \cdot \frac{1}{\underbrace{2n}_{\text{Plus petit terme de la somme}}} = \frac{1}{2}.$$

On a $S_1 = 1$, $S_2 \geq 1 + \frac{1}{2}$, $S_4 \geq S_2 + \frac{1}{2} \geq 1 + 2\cdot\frac{1}{2}$, $S_8 \geq S_4 + \frac{1}{2} \geq 1 + 3\cdot\frac{1}{2}$.

Par récurrence on montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $S_{2^k} \geq 1 + k\cdot\frac{1}{2}$.

2 puissance k.

Donc la suite (S_n) n'est pas majorée.

(iii) (S_n) est croissante et non majorée donc $\lim S_n = +\infty$ ∎

Plus généralement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ avec } p \in \mathbb{R}}$$

- converge si $p > 1$ (par l'argument vu au Chap 3.5)
- diverge si $p \leq 1$ (par comparaison, cf. Chap. 4.2)

- Séries géométriques : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ avec $q \in \mathbb{R}^*$ fixé.

Prop: Cette série converge absolument pour $|q| < 1$ et diverge pour $|q| \geq 1$.

Preuve : . Pour $q = 1$ alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

. Pour $q \neq 1$ alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

→ Si $|q| < 1$ on a $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q} \in \mathbb{R}$

→ Si $|q| \geq 1$, on utilise le critère ci-dessous. ∎

4.2 Critères de convergence pour les séries

Thm (critère nécessaire). $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)$.

⚠ L'implication réciproque est fausse. Exemple : $a_k = \frac{1}{k}$.

Thm (Critère de Leibniz / des séries alternées). Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite.

Si : (i) (a_k) est alternée, c'est-à-dire $\begin{cases} \text{soit } (-1)^k a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \text{soit } (-1)^{k+1} a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$,

(ii) $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire $|a_{k+1}| \leq |a_k|$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

(iii) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge

Exemple: Série harmonique alternée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On a, avec $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

(i) (a_k) est alternée (en effet $(-1)^{k+1} a_k = \frac{1}{k} \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$)

(ii) $|a_k| = \frac{1}{k}$ donc $(|a_k|)$ est décroissante

(iii) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Donc par le critère de Leibniz la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

En revanche $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ne converge pas absolument (car $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge).

Thm (critère de comparaison).

- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq |a_k| \leq b_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolument.
- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_k \leq a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge

Thm (critère de D'Alembert et de Cauchy pour les séries)

Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ avec $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Alors :

- si $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \in \mathbb{R}$ (d'Alembert)

ou

- si $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = q \in \mathbb{R}$ (de Cauchy)

ou

- si $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = q \in \mathbb{R}$ (critère de la lim-sup).

Alors :
- si $(0 \leq q) < 1$ alors la série converge absolument
- si $q > 1$ alors la série diverge.

Rmq : * Si $q = 1$, on ne peut rien conclure.

* On a toujours :

$$\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \liminf |a_k|^{1/k} \leq \limsup |a_k|^{1/k} \leq \limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| .$$

(on en déduit que le critère de Cauchy est plus fin).

Exemples :

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3k-5}{4k+5}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{3k-5}{4k+5}\right| = \frac{3}{4} = q$$

Comme $q < 1$, par le critère de Cauchy, la série converge absolument.

fin 17/10

(ii)