0) On a $a_0 = 4$. Si $a_n > 0$ alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) > 0$

Donc par récurrence immédiate $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc la suite est bien définie.

1) Supposons que (a_n) converge et que $\lim a_n = a \neq 0$. Alors :

règles algébriques des limites

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \frac{5}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \end{cases}$$

Donc on a l'équation de "point fixe" :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \\ a \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} a = \frac{5}{2a} \\ a \neq 0 \end{cases} \iff a^2 = 5 \iff \begin{cases} a = +\sqrt{5} \\ \text{ou} \\ a = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Mais $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc si (a_n) converge vers une limite non nulle cette limite doit être $\sqrt{5}$.

2) Montrons que (a_n) est minorée (par $\sqrt{5}$).

$$a_0 = 4 > \sqrt{5}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $$a_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) - \sqrt{5} = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{5}\,a_n + 5}{2a_n} = \frac{\overbrace{(a_n - \sqrt{5})^2}^{\geq 0}}{\underbrace{2a_n}_{>0}} \geq 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \sqrt{5}$.

3) Montrons que (a_n) est décroissante.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) - a_n = \frac{5}{2a_n} - \frac{1}{2}a_n$$

$$= \frac{\overbrace{5 - a_n^2}^{\leq 0}}{\underbrace{2a_n}_{>0}} \leq 0$$

Donc (a_n) est décroissante.

4) En conclusion, (a_n) décroissante, minorée par $\sqrt{5}$ donc elle converge.
Parmi les limites "candidates" $(0, -\sqrt{5}, \sqrt{5})$ la seule compatible avec $a_n \geq \sqrt{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

et $\sqrt{5}$. Donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}}$.

Plus généralement pour $c > 0$, $\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \forall n \end{cases}$ converge vers $\sqrt{c}$.

→ Algorithme de Héron (cas particulier de la méthode de Newton).

▶ Suites définies par récurrence linéaire / affine

Suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de la forme $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = g(a_n)\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ avec $g(x) = q\cdot x + b$ avec $q, b \in \mathbb{R}$

fonction affine

Cas particuliers:

1/ Suites arithmétiques: $(q = 1)$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \underset{\text{(par récurrence)}}{\Longleftrightarrow} a_n = a_0 + n\cdot b, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2/ Suites géométriques: $(b = 0)$

$$\begin{cases} a_{n+1} = q\cdot a_n \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \underset{\text{(par récurrence)}}{\Longleftrightarrow} a_n = a_0 \cdot q^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Thm. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = q\cdot a_n + b \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 1$ et $b \in \mathbb{R}$

Soit $a = \frac{b}{1-q}$ (la solution de l'équation de point fixe).

- Si $|q| < 1$ ou si $a_0 = a$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
- Si $|q| \geq 1$ et $a_0 \neq a$ alors (a_n) diverge

Preuve. (0) (a_n) est bien définie car $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$

(i) Si (a_n) converge alors

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} q\cdot a_n + b \overset{\text{règles algébriques}}{=} q\cdot\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + b = q\cdot a + b$$

Donc $(1-q)\cdot a = b \iff a = \dfrac{b}{1-q}$

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underbrace{|a_{n+1} - a|}_{u_{n+1}} = |q\cdot a_n + b - (q\cdot a + b)|$$
$$= |q\cdot a_n - q\cdot a|$$
$$= |q|\cdot|a_n - a| \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} = |q|\cdot u_n$$
$$= |q|^{n+1}\cdot \underbrace{|a_0 - a|}_{u_0} \quad ((u_n) \text{ suite géométrique de raison } |q|)$$

→ Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$
donc $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

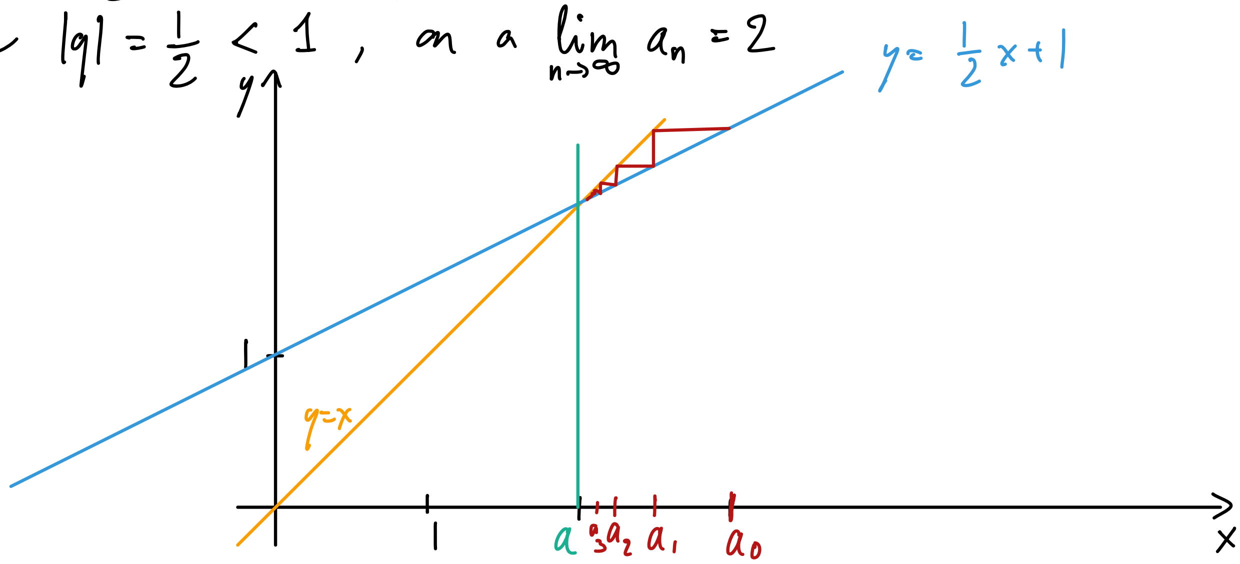
→ Si $a_0 = a$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

→ Si $|q| \geq 1$ et $a_0 \neq a$, (a_n) n'est pas bornée donc diverge. ■

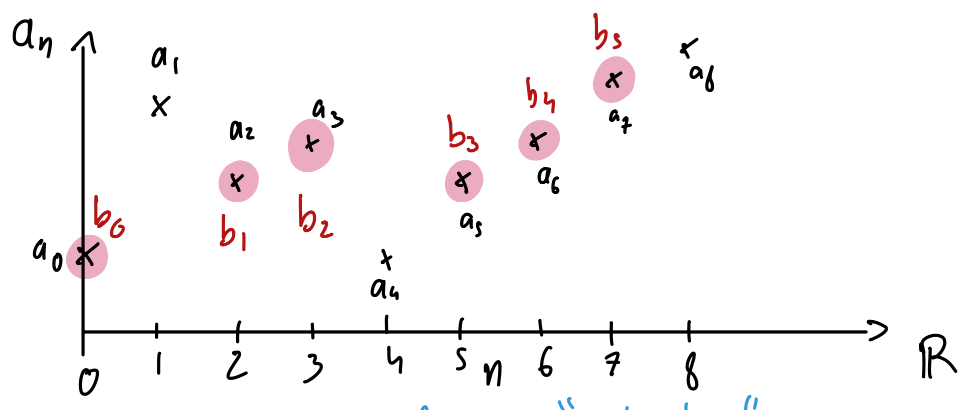
Exemple : $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{2}}}_{q} a_n + \underbrace{\boxed{1}}_{b}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ici $a = \frac{1}{2} a + 1 \iff \frac{1}{2} a = 1 \iff a = 2$

Comme $|q| = \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$



3.7 Sous-suites et Thm. de Bolzano-Weierstrass



Déf : Soit $\underbrace{(n_k)_{k\geq 0}}$ appelée une "extractrice" une suite strictement croissante d'entiers naturels, c-à-d $\forall k \in \mathbb{N}$, $n_k \in \mathbb{N}$ et $n_{k+1} - n_k > 0$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite. La suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est appellée une sous-suite de la suite (a_n).

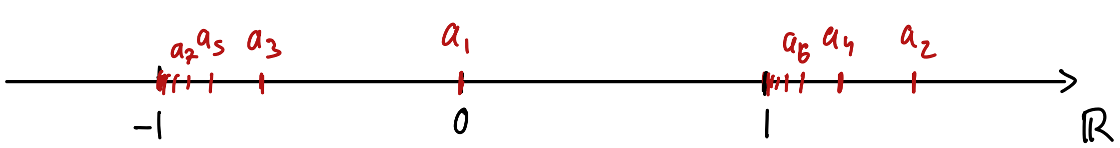
Dans l'exemple : $b_k = a_{n_k}$ avec $n_0 = 0$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $n_4 = 6$, etc.

Thm (Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Déf (Point d'accumulation). On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de la suite (a_n) s'il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

→ Le Thm. de B.-W. nous dit que toute suite bornée admet au moins 1 point d'accumulation.

Exemple : $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\left(a_1 = 0,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{-2}{3},\ a_4 = \frac{5}{4}, \dots\right)$



* La suite (a_n) est bornée ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq a_n \leq 2$) donc par B.-W. elle admet au moins un point d'accumulation.

* Les points d'accumulation sont -1 et 1. En effet :

  ▶ $\lim\limits_{k \to \infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k \to \infty} \left(-1 + \frac{1}{2k+1}\right) = -1$ (ici $n_k = 2k+1$)

  ▶ $\lim\limits_{k \to \infty} a_{2k} = \lim\limits_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1$ (ici $n_k = 2k$)

Ce sont les seuls points d'accumulation car $\{a_{2k+1} ; k \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2k} ; k \in \mathbb{N}^*\} = \{a_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$.

⚠ $(a_{3k})_{k \geq 0}$ est une sous-suite (avec $n_k = 3k$) mais elle ne converge pas.

Proposition : Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors toute sous-suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ aussi.

3.8 Limite inférieure et limite supérieure

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. On définit :

$$A_0 = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \qquad b_0 := \inf A_0 \leq \sup A_0 =: c_0$$

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots\} \qquad b_0 \leq b_1 := \inf A_1 \leq \sup A_1 =: c_1 \leq c_0$$

$$\vdots$$

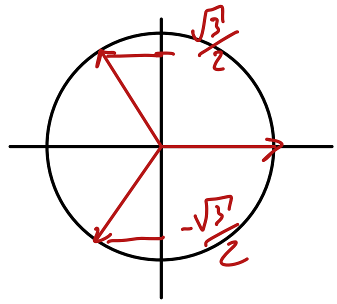
$$A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \qquad b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n = \inf A_n \leq \sup A_n =: c_n \leq \dots \leq c_1 \leq c_0$$

$$\begin{cases} (b_n) \text{ croissante et majorée} \Rightarrow \text{converge} \\ (c_n) \text{ décroissante et minorée} \Rightarrow \text{converge.} \end{cases}$$

Def :
- Limite inférieure : $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n := \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \lim\limits_{n \to \infty} \inf \overbrace{\{a_k ; k \geq n\}}^{A_n}$
- Limite supérieure : $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n := \lim\limits_{n \to \infty} c_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sup \{a_k ; k \geq n\}$

Exemple : Prenons la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot n\right) + \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$

On a $\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3k, \; k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } n = 3k+1, \; k \in \mathbb{N}^* \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } n = 3k+2, \; k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$



- Donc $\underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\sqrt{3}}{2}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

fin 14/10