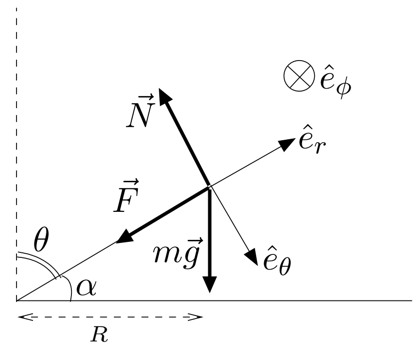
Corrigé Série 06 : Forces de frottement

1 Voiture dans un virage incliné

a) Trois forces s'exercent sur la voiture (voir dessin) :

- le poids de la voiture $m\vec{g}$.
- la force de soutien $\vec{N}$ perpendiculaire à la route.
- une force de frottement statique $\vec{F}$, tangente à la route, perpendiculaire à la vitesse et dirigée vers l'intérieur du virage pour empêcher la voiture de déraper vers l'extérieur.



La contrainte est ici que la voiture reste sur la surface de la route, qui est la surface d'un cône de révolution d'axe vertical, ouvert vers le haut, avec un demi-angle au sommet égal à $\theta = \pi/2 - \alpha$. Cette contrainte s'exprime le plus naturellement dans un repère associé aux coordonnées sphériques, avec l'origine au sommet du cône et $\vec{e}_z$ vers le haut. La surface du cône est simplement décrite par la condition "$\theta = \text{constante} = \pi/2 - \alpha$" (sans conditions sur r et ϕ).

b) Pour trouver la vitesse maximale que peut prendre la voiture, on utilise la deuxième loi de Newton

$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}. \tag{1}$$

L'accélération en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta)\hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{e}_\phi \tag{2}$$

Les contraintes sont : $r = \text{constante} = R/\cos\alpha$, $\theta = \text{constante} = \pi/2 - \alpha$ et $\dot{\phi} = \text{constante} = v/R$ donc l'accélération devient :

$$\vec{a} = -\frac{R}{\cos\alpha}\frac{v^2}{R^2}\cos^2\alpha\hat{e}_r - \frac{R}{\cos\alpha}\frac{v^2}{R^2}\cos\alpha\sin\alpha\hat{e}_\theta = -\frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha\,\hat{e}_r + \sin\alpha\,\hat{e}_\theta\right). \tag{3}$$

(On voit que ce résultat ce retrouve facilement à partir de l'expression de l'accélération purement centripète pour ce cas particulier du mouvement circulaire uniforme.)

On projette l'équation du mouvement (1) sur les axes

$$\text{sur } \hat{e}_r : \quad -mg\sin\alpha + F_r = -m\frac{v^2}{R}\cos\alpha \tag{4}$$

$$\text{sur } \hat{e}_\theta : \quad +mg\cos\alpha + N_\theta = -m\frac{v^2}{R}\sin\alpha, \tag{5}$$

où $F_r = \vec{F}\cdot\hat{e}_r$ est la composante du vecteur $\vec{F}$ selon $\hat{e}_r$ et $N_\theta = \vec{N}\cdot\hat{e}_\theta$ est la composante du vecteur $\vec{N}$ selon $\hat{e}_\theta$.

On peut réarranger les équations (4) et (5) pour trouver les expressions de F_r et N_θ :

$$F_r = -mg\cos\alpha\left(\frac{v^2}{gR} - \tan\alpha\right), \tag{6}$$

$$N_\theta = -mg\cos\alpha\left(1 + \frac{v^2}{gR}\tan\alpha\right). \tag{7}$$

On constate que l'expression de F_r est négative si $v^2 > gR\tan\alpha$, ce qui correspond au cas où la vitesse est suffisamment grande pour que la force de frottement soit dirigée comme sur le dessin. Nous considérons cette condition satisfaite. L'expression de N_θ est, elle, toujours négative.

La condition pour que la voiture ne dérape pas vers l'extérieur est $|F_r| \leq \mu|N_\theta|$, c'est-à-dire :

$$\frac{v^2}{gR} - \tan\alpha \leq \mu\left(1 + \frac{v^2}{gR}\tan\alpha\right), \tag{8}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{v^2}{gR}(1 - \mu\tan\alpha) \leq \mu + \tan\alpha. \tag{9}$$

Deux cas doivent être considérés :

i) Si $1 - \mu\tan\alpha \leq 0$, c'est-à-dire si $\tan\alpha \geq \frac{1}{\mu}$, alors la condition est automatiquement satisfaite. Dans ce cas, la voiture ne peut pas déraper vers l'extérieur et la force de frottement ne peut jamais atteindre sa valeur maximale, même si la vitesse tend vers l'infini.

ii) Si $1 - \mu\tan\alpha > 0$, c'est-à-dire si $\tan\alpha < \frac{1}{\mu}$, alors la condition devient

$$\frac{v^2}{gR} \leq \frac{\mu + \tan\alpha}{1 - \mu\tan\alpha}. \tag{10}$$

Soit finalement,

$$v \leq \sqrt{gR\frac{\mu + \tan\alpha}{1 - \mu\tan\alpha}} \tag{11}$$

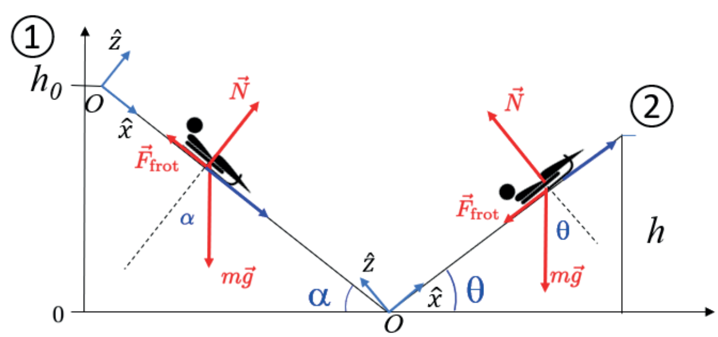
Une analyse dimensionnelle montre que le membre de droite a bien la dimension d'une vitesse.

Application numérique : $v_{\max} = \sqrt{10 \times 300\frac{1+\tan(15\pi/180)}{1-1\times\tan(15\pi/180)}} \simeq 72$ m/s $\simeq 260$ km/h.

2 Sport d'hiver

a) Comme dans l'exercice précédent, trois forces s'exercent sur la luge (voir dessin) :

- le poids $m\vec{g}$.
- la force de soutien $\vec{N}$ perpendiculaire à la pente.
- une force de frottement $\vec{F}_{\text{frot}}$, tangente à la pente, qui s'oppose au glissement de la luge.



On utilise un repère cartésien fixe dans le référentiel avec l'axe $\hat{x}$ parallèle à la pente, vers le bas, et $\hat{z}$ perpendiculaire à la pente, vers le haut. A l'équilibre, l'accélération et nulle ; on projette alors la deuxième loi de Newton selon $\hat{x}$ et $\hat{z}$ pour trouver que :

$$\text{sur } \hat{z} : \qquad N_z - mg\cos\alpha = 0, \tag{12}$$

$$\text{sur } \hat{x} : \qquad F_x + mg\sin\alpha = 0. \tag{13}$$

où les composantes dans forces a priori inconnues sont $F_x = \vec{F}_{\text{frot}} \cdot \vec{e}_x$ et $N_z = \vec{N} \cdot \vec{e}_z$. La force de frottement statique a pour norme maximale $\mu_s|N_z| = \mu_s\, mg\cos\alpha$ (car $\cos\alpha > 0$ ici). On obtient donc la condition de non glissement :

$$mg\sin\alpha \leq \mu_s\, mg\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \tan\alpha \leq \mu_s. \tag{14}$$

b) Lorsque la luge glisse, l'expression de la force de frottement cinétique (opposée à la vitesse) est connue : $F_x = -\mu_c\, mg\cos\alpha$. L'équation du mouvement selon $\hat{x}$ est alors :

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - mg\cos\alpha\ \mu_c = mg\sin\alpha\left[1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right] = A\ mg\sin\alpha. \tag{15}$$

On intègre une fois par rapport au temps pour trouver la vitesse (avec vitesse initiale nulle) :

$$\dot{x}(t) = A\ g(\sin\alpha)\ t, \tag{16}$$

et une deuxième fois pour obtenir la distance parcourue (avec la position initiale à l'origine du repère) :

$$x(t) = \frac{1}{2}A\ g(\sin\alpha)\ t^2. \tag{17}$$

On remarque que la vitesse augmente proportionnellement au temps, donc la vitesse maximale est atteinte au point le plus bas, c'est-à-dire après avoir parcouru une distance $L = \frac{h_0}{\sin\alpha}$. Le point le plus bas est atteint à l'instant

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha\ A}} \tag{18}$$

d'où

$$v_{\max} = g\sin\alpha\ A\sqrt{\frac{2h_0}{g\sin^2\alpha\ A}} = \sqrt{2h_0gA} \tag{19}$$

c) Dans cette deuxième phase du mouvement la luge remonte la pente d'en face. On change donc l'orientation de x, z pour suivre la pente qui remonte, et l'origine est désormais au point le plus bas (où la vitesse et $v_{\max}$). L'équation du mouvement selon $\hat{x}$ devient

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta - mg\cos\theta\ \mu_c = -mg\sin\theta\left[1 + \frac{\mu_c}{\tan\theta}\right] = -B\ mg\sin\theta. \tag{20}$$

En integrant par rapport au temps on trouve la vitesse

$$\dot{x}(t) = -B\ g(\sin\theta)\ t + v_{\max}. \tag{21}$$

La luge s'arrête quand $\dot{x}(t) = 0$, c'est-à-dire quand

$$t = \frac{v_{\text{max}}}{gB\sin\theta}.$$

La distance parcourue est alors

$$L = -\frac{1}{2}gB\sin\theta\left(\frac{v_{\text{max}}}{gB\sin\theta}\right)^2 + v_{\text{max}}\frac{v_{\text{max}}}{gB\sin\theta} = \frac{v_{\text{max}}^2}{2gB\sin\theta}. \tag{22}$$

La hauteur recherchée est donc

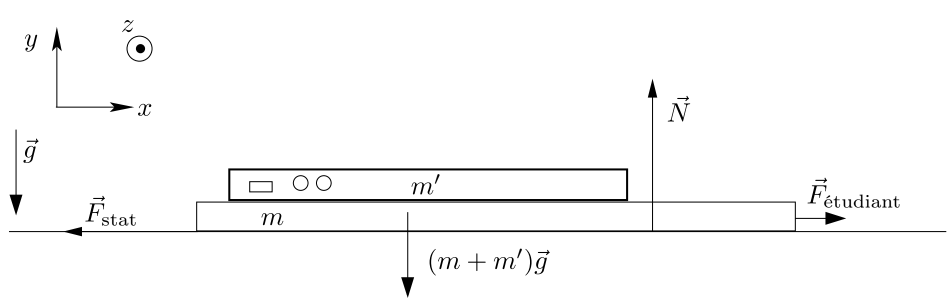
$$h = L\sin\theta = \frac{v_{max}^2}{2gB} = h_0\frac{A}{B}. \tag{23}$$

d) En l'absence de frottement, $A = B = 1$; donc on trouve $h = h_0$ comme attendu.

3 La feuille d'exercices

a) On décrit la situation dans le référentiel de la table. On choisit un repère fixe avec l'axe x horizontal dans la direction de la force exercée par l'étudiant et un axe y vertical vers le haut. Lorsque la force $\vec{F}_{\text{etudiant}}$ est trop petite pour mettre la feuille en mouvement, les forces extérieures qui s'appliquent sur le système 'feuille+téléphone' sont
— son poids $(m + m')\vec{g}$, où $\vec{g} = -g\hat{e}_y$,
— la force de soutien de la table $\vec{N} = N\hat{e}_y$ où $N = |\vec{N}|$ est la norme,
— la force horizontale $\vec{F}_{\text{etudiant}} = F_{\text{etudiant}}\hat{e}_x$ où $F_{\text{etudiant}} = |\vec{F}_{\text{etudiant}}|$ est la norme,
— la force de frottement statique exercée par la table $\vec{F}_{\text{stat}} = -F_{\text{stat}}\hat{e}_x$, horizontale et de direction opposée à $\vec{F}_{\text{etudiant}}$, où $F_{\text{stat}} = |\vec{F}_{\text{stat}}|$ est la norme.

<u>Attention</u> : nous faisons ici le choix de travailler avec les normes des vecteurs ($N, F_{\text{etudiant}}, F_{\text{stat}} > 0$) et non leurs composantes, car nous connaissons les directions des forces a priori. Mais l'exercice peut aussi se résoudre avec la méthode habituelle de projection des composantes. Il faut être attentif aux signes des composantes lorsque l'on prend les valeurs absolues.



Rappel : le système 'feuille+téléphone' est traité ici comme un point matériel et on ne considère donc que les forces appliquées par l'extérieur du système sur ce "point". Les forces internes à ce point (par exemple les forces de frottements entre la feuille et le téléphone) n'interviennent pas.
Le système est à l'équilibre, la deuxième loi de Newton s'écrit

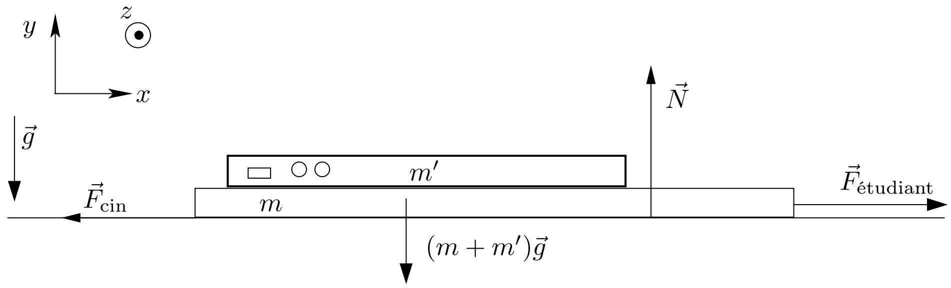
$$(m + m')\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{etudiant}} + \vec{F}_{\text{stat}} = \vec{0}.$$

En projection sur l'axe vertical y, on a $N = (m + m')g$.
En projection sur l'axe horizontal x, on a $F_{\text{stat}} = F_{\text{etudiant}}$, qui est vérifiée tant que la valeur maximale de la norme de la force de frottement, $F_{\text{stat}}^{max} = \mu_s|\vec{N}|$, n'est pas atteinte. Donc, pour que le système 'feuille+téléphone' ne bouge pas :

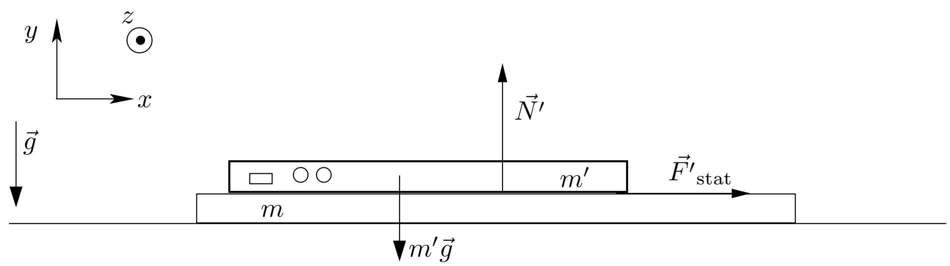
$$|\vec{F}_{\text{etudiant}}| < F_{\text{stat}}^{max} = \mu_s|\vec{N}| = \mu_s(m + m')g.$$

Si $|\vec{F}_{\text{etudiant}}|$ est plus grand que cette valeur limite, le système feuille+téléphone se met en mouvement.

b) Lorsque la force $|\vec{F}_{\text{etudiant}}|$ est plus grande que la valeur limite $\mu_s(m+m')g$, le système feuille+téléphone se met en mouvement. Cependant si la force $\vec{F}_{\text{etudiant}}$ est trop faible pour que la feuille glisse sous le téléphone, ce dernier reste sur la feuille en tout temps et on peut étudier le système 'feuille+téléphone' en mouvement. Lorsque le système 'feuille+téléphone' est en mouvement, la force de frottement statique est remplacée par une force de frottement cinétique $\vec{F}_{\text{cin}}$. Elle est exercée par la table et est horizontale et de direction opposée à $\vec{F}_{\text{etudiant}}$.



Considérons maintenant les forces qui s'appliquent sur le téléphone :
— son poids $m'\vec{g}$,
— la force de soutien exercée par la feuille $\vec{N}'$,
— la force de frottement exercée par la feuille $\vec{F}'_{\text{stat}}$. Cette force est horizontale dans une direction qui empêche le téléphone de glisser sur la feuille ; comme le téléphone pourrait glisser vers la gauche (vers les x négatifs), la force de frottement statique est dirigée vers la droite (vers les x positifs).



Considérons les projections selon x de la deuxième équation de Newton pour le téléphone, ainsi que pour le système 'feuille+téléphone' (les projections selon y ne servent qu'à déterminer les valeurs de forces de soutien $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ et sont évidentes).

— Pour le téléphone : $F'_{\text{stat}} = m'\ddot{x}'$.
— Pour le système 'feuille+téléphone' : $F_{\text{etudiant}} - F_{\text{cin}} = (m + m')\ddot{x}$.

Dans la situation où le téléphone ne bouge pas par rapport à la feuille, on a $\ddot{x} = \ddot{x}'$. En combinant les deux équations précédentes, on obtient

$$F_{\text{etudiant}} = F_{\text{cin}} + (m + m')\frac{F'_{\text{stat}}}{m'}. \tag{24}$$

Ceci est vrai tant que la force F'_{stat} ne dépasse pas la valeur limite $F'^{max}_{\text{stat}} = \mu'_s|\vec{N}'| = \mu'_s m' g$, faute de quoi le téléphone se mettra en mouvement par rapport à la feuille. La condition pour que la feuille glisse sous le téléphone s'écrit donc

$$\begin{aligned} F_{\text{etudiant}} &> F_{\text{cin}} + \frac{m+m'}{m'}\mu'_s m' g \\ &= (\mu_c + \mu'_s)(m+m')g, \end{aligned}$$

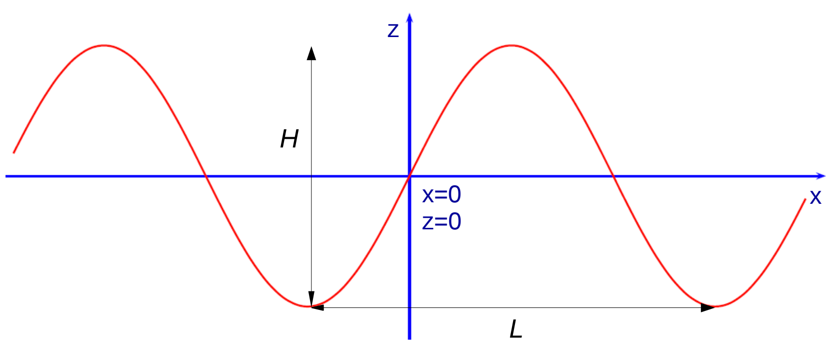
où l'on a introduit $F_{\text{cin}} = \mu_c(m+m')g$.

Cependant pour que la feuille glisse sous le téléphone, il faut également exiger que $F_{\text{etudiant}} > \mu_s(m+m')g$ pour mettre en mouvement la feuille (résultat du point a)). Si ce n'est pas le cas, la condition trouvée au point a) n'est pas satisfaite et tout restera immobile. Finalement, la condition pour que la feuille glisse sous le téléphone est donc

$$F_{\text{etudiant}} > \max\left[\mu_s, (\mu_c + \mu'_s)\right](m+m')g. \tag{25}$$

4 Champ de bosses

On choisit des axes x et z comme sur le dessin ci-dessous. On choisit l'origine du temps de telle sorte que $t = 0$ quand $x = 0$.



a) On sait que la route a un profil sinusoïdal. La hauteur de la roue (coordonnée z) s'écrit donc :

$$h(x) = A\sin(\alpha x)$$

où A et α sont les paramètres du profil sinusoïdal.

D'après les données du problème, on peut écrire $A = \frac{H}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, et donc

$$h(x) = \frac{H}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right). \tag{26}$$

La voiture a une vitesse horizontale constante v_x. On peut donc écrire $x(t) = v_x t$, l'équation horaire de la roue devient :

$$h(t) = \frac{H}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}v_x t\right). \tag{27}$$

b) Soit $z(t)$, la hauteur de la voiture. L'équation du mouvement de la voiture est donnée par la deuxième loi de Newton $\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F_r} = m\vec{a}$ où $\vec{P}$ est le poids de la voiture et $\vec{F_r}$ la force de rappel du ressort. En projection sur l'axe z, on a $P = -mg$ et $F_r = -k\Delta z$ où Δz représente l'allongement du ressort et peut s'écrire $\Delta z = z(t) - h(t) - l_0$. Pour s'en convaincre, on peut se dire que $z(t)$ représente la position (verticale) de la voiture au cours du temps et $h(t)$ la position (verticale) de la roue au cours du temps. $z(t) - h(t)$ est dès lors la distance voiture-roue, c'est-à-dire la longueur du ressort. Et donc finalement $z(t) - h(t) - l_0$ est la différence entre la longueur du ressort et sa longueur au repos. Cette expression est donc bien l'allongement du ressort Δz. Pour se convaincre du signe $-$, on peut faire le raisonnement suivant : si $z(t) - h(t) - l_0 > 0$, alors le ressort est étiré, il exerce une force vers le bas. Le signe de cette force est négatif ce qui est cohérent car l'axe z est dirigé vers le haut. Si $z(t) - h(t) - l_0 < 0$ alors la force est dirigée vers le haut et son signe est positif.

En projection sur l'axe z, l'équation du mouvement s'écrit donc

$$m\ddot{z} = -mg - k\left[z - h(t) - l_0\right] = -mg - kz + kl_0 + k\frac{H}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}v_x t\right). \tag{28}$$

Si on pose $\omega = \frac{2\pi v_x}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on récrit cette équation :

$$\ddot{z} + g + \omega_0^2 z - \omega_0^2 l_0 = \omega_0^2\frac{H}{2}\sin(\omega t). \tag{29}$$

c) On remarque que l'équation (29) peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{z} + \omega_0^2\left(z + \frac{g}{\omega_0^2} - l_0\right) = \omega_0^2\frac{H}{2}\sin(\omega t),$$

qui est presque l'équation demandée. Pour y arriver, il suffit de faire un changement de variable $z \to u$ avec

$$u = z + \frac{g}{\omega_0^2} - l_0,$$

ce qui donne $\ddot{z} = \ddot{u}$, et donc on obtient l'équation

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2\frac{H}{2}\sin(\omega t), \tag{30}$$

qui a bien la forme demandée, si $\alpha_0 = \omega_0^2\frac{H}{2}$.

d) Dans la donnée, on nous propose d'utiliser une solution de la forme

$$u(t) = \rho\sin(\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad \varphi = 0. \tag{31}$$

On la dérive deux fois et on l'introduit dans l'équation du mouvement (30), qui devient

$$-\rho\omega^2\sin(\omega t) + \omega_0^2\rho\sin(\omega t) = \omega_0^2\frac{H}{2}\sin(\omega t).$$

En divisant par $\sin(\omega t)$, on obtient :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\rho = \omega_0^2\frac{H}{2},$$

et donc

$$\rho = \frac{H}{2}\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}.$$

La grandeur ρ représente l'amplitude des oscillations verticales de la masse m. Dans le cas de notre voiture, plus cette valeur sera petite, plus notre voiture sera confortable.
Il faut distinguer ici 3 cas différents :

- La vitesse est telle que $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire $v_x = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{L}{2\pi}$. Dans ce cas-là l'amplitude des oscillations tendra vers l'infini (phénomène de résonance) et le véhicule sera très inconfortable.
- La vitesse est plus petite que $\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{L}{2\pi}$. Dans ce cas, l'amplitude des oscillations sera finie, mais ne pourra pas descendre en dessous d'une certaine limite. En effet, lorsque $v_x \to 0$ (c'est à dire $\omega \to 0$), on a
$$u_{max} \to \frac{H}{2}.$$
- La vitesse est plus grande que $\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{L}{2\pi}$. Dans ce cas, plus la vitesse est grande, plus l'amplitude sera petite. Dans le cas limite v_x ou $\omega \to \infty$ on a $u_{max} \to 0$.

En conclusion, pour rouler avec le plus de confort possible sur une route bosselée, il faut rouler le plus vite possible. Et lorsque cela n'est pas possible, il faut rouler avec une vitesse très faible. Mais dans tous les cas éviter de rouler avec une vitesse proche de celle qui correspond à la résonance. Ce phénomène est illustré dans le film *Le salaire de la peur* de Henri-Georges Clouzot avec Yves Montand et Charles Vanel.