Exercice 1.

a) $a^2m + abm - 3am - 3bm = am(a+b) - 3m(a+b) = (a+b)(am-3m) = m(a+b)(a-3)$

b) $m + n + p - am - an - ap = m + n + p - a(m+n+p) = (1-a)(m+n+p)$

c) $ax + x - a - 1 = x(a+1) - 1(a+1) = (a+1)(x-1)$

d) $a^3 + a^2 + a + 1 = a^2(a+1) + 1(a+1) = (a+1)(a^2+1)$

e) $6x^2 + xy + 18xz + 3yz = x(6x+y) + 3z(6x+y) = (6x+y)(x+3z)$

f) $20xy + 4y - 5x - 1 = 4y(5x+1) - 1(5x+1) = (5x+1)(4y-1)$

g) $6x^2 - 5xz - 6x + 5z = 6x(x-1) - 5z(x-1) = (x-1)(6x-5z)$

h) $y^3 - y - y^2 + 1 = y(y^2-1) - 1(y^2-1) = (y^2-1)(y-1) = (y+1)(y-1)(y-1) = (y+1)(y-1)^2$

i) $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 2ab(a+b) = (a+b)(a^2-ab+b^2) + 2ab(a+b) = (a+b)(a^2-ab+b^2+2ab) = (a+b)(a^2+ab+b^2)$

j) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 = 1(1-x+x^2) - x^3(1-x+x^2) = (1-x+x^2)(1-x^3) = (1-x+x^2)(1-x)(1+x+x^2)$

k) $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 = 1(1+b+b^2) + b^3(1+b+b^2) = (1+b+b^2)(1+b^3) = (1+b+b^2)(1+b)(1-b+b^2)$

l) $x^2 - xy + xz - x + y - z = x(x-y+z) - 1(x-y+z) = (x-y+z)(x-1)$

m) $2x^2 + 12xy + 18y^2 - 8 = 2(x^2+6xy+9y^2-4) = 2((x+3y)^2-4) = 2(x+3y-2)(x+3y+2)$

Exercice 2.

a)

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -10 & 11 & -5 \\ 1 & & 4 & -6 & 5 \\ \hline & 4 & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

Ainsi $4x^3 - 10x^2 + 11x - 5 = (x-1)(4x^2 - 6x + 5)$.

b)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 9 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & & -18 & 34 & -66 & 130 \\ \hline & 9 & -17 & 33 & -65 & 132 \end{array}$$

Ainsi $9x^4 + x^3 - x^2 + x + 2 = (x+2)(9x^3 - 17x^2 + 33x - 65) + 132$.

c)

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -7 & 8 & -5 \\ -\frac{2}{3} & & -4 & \frac{22}{3} & -\frac{92}{9} \\ \hline & 6 & -11 & \frac{46}{3} & -\frac{137}{9} \end{array}$$

Ainsi $6x^3 - 7x^2 + 8x - 5 = (x + \frac{2}{3})(6x^2 - 11x + \frac{46}{3}) - \frac{137}{9}$.

d)

$$\begin{array}{c|ccc} & 10 & -19 & -17 \\ \frac{5}{2} & & 25 & 15 \\ \hline & 10 & 6 & -2 \end{array}$$

Ainsi $10x^2 - 19x - 17 = (x - \frac{5}{2})(10x + 6) - 2$.

Exercice 3. Dans chaque cas il s'agit d'effectuer la division du premier polynôme par le second et d'égaler le reste à 0. Pour le 1er cas, on présente 2 résolutions possibles. Pour les cas 2 à 3, on utilisera le schéma de Horner pour effectuer la division, et, au quatrième cas, on effectuera une division euclidienne (seule méthode possible ici, puisque le diviseur n'est pas de la forme $x - k$ avec $k \in \mathbb{R}$).

a) **Méthode avec le "truc du reste".** Par un corollaire du cours, le reste de la division de $f(x)$ par $x - k$ vaut $f(k)$. Ici, $k = 3$, et le reste vaudra donc $f(k) = 3^2 + a \cdot 3 + 12 = 21 + 3a$. La donnée demande que ce reste soit nul, c'est-à-dire $21 + 3a = 0$, soit $a = -7$. Pour obtenir le quotient de la division de $f(x) = x^2 - 7x + 12$ par $x - 3$, on peut utiliser Horner :

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -7 & 12 \\ 3 & & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

On obtient donc le quotient $q(x) = x - 4$. Un autre méthode possible ici est de directement factoriser $f(x)$ avec Viète $f(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, d'où l'on déduit que le quotient de la division de $f(x)$ par $x - 3$ est $q(x) = x - 4$.

Méthode avec Horner seulement. On établit le schéma de Horner pour la division de $f(x) = x^2 + ax + 12$ par $x - 3$:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & a & 12 \\ 3 & & 3 & 3a+9 \\ \hline & 1 & a+3 & 3a+21 \end{array}$$

Le reste est égal à $3a + 21$, en égalant ce reste à 0, on a $3a = -21$ et donc $a = -7$. Dans ce cas, le quotient est $q(x) = x - 4$.

b)

$$\begin{array}{cccc} & 1 & a & 15 \\ -3 & & -3 & -3a+9 \\ \hline & 1 & a-3 & -3a+24 \end{array}$$

Le reste est égal à $-3a + 24$, en l'égalant à 0 on obtient $3a = 24$ et donc $a = 8$. Dans ce cas, le quotient est $q(x) = x + 5$.

c)

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & a & 19 & -12 \\ 1 & & 1 & a+1 & a+20 \\ \hline & 1 & a+1 & a+20 & a+8 \end{array}$$

Le reste est égal à $a + 8$, en l'égalant à 0 on obtient $a = -8$. Dans ce cas, le quotient est $q(x) = x^2 - 7x + 12$ (soit $q(x) = (x-3)(x-4)$ sous sa forme factorisée).

d)

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^6 & +x^4 & +ax^3 & +bx^2 & -x & -1 & x^3 \quad +x \ +1 \\ \cline{7-7} -x^6 & -x^4 & -x^3 & & & & x^3 \ +(a-1) \\ \cline{1-3} & & (a-1)x^3 & & & & \\ & & -(a-1)x^3 & & -(a-1)x & -(a-1) & \\ \cline{3-6} & & & bx^2 & -ax & -a & \end{array}$$

Le reste est le polynôme $r(x) = bx^2 - ax - a$ qui est nul précisément si $b = 0$ *et* $a = 0$ (si l'un de ces paramètres n'est pas nul, $r(x)$ ne sera pas le polynôme constant 0). Dans ce cas, le quotient est $q(x) = x^3 - 1$.

Exercice 4. Nous allons à chaque fois regarder si $-a$ ou $-2a$ sont des racines des polynômes donnés.

a) Pour le premier cas, $f(x) = x^5 + a^5$, pour que $f(x)$ soit divisible par $x + a$, il faut et il suffit que $-a$ soit une racine de $f(x)$. Or $f(-a) = -a^5 + a^5 = 0$, donc $-a$ est une racine de $f(x)$ et $f(x)$ et ainsi divisible par $x + a$.

b) $f(x) = x^5 - a^5$, $f(-a) = -a^5 - a^5 = -2a^5 \neq 0$, ainsi si $a \neq 0$, $f(x)$ n'est pas divisible par $x + a$.

c) $f(x) = x^6 - 12a^2x^4 - 75a^5x - 22a^6$, $f(-2a) = 64a^6 - 192a^6 + 150a^6 - 22a^6 = 0$, ainsi $f(x)$ est divisible par $x + 2a$.

d) $f(x) = 5x^4 + 7ax^3 - 4a^2x^2 + 2a^3x - 4a^4$, $f(-2a) = 80a^4 - 56a^4 - 16a^4 - 4a^4 - 4a^4 = 0$, ainsi $f(x)$ est divisible par $x + 2a$.

Exercice 5. Pour que le polynôme $f(x) = (x+1)^k - (x-1)^k$ soit divisible par x, il faut et il suffit que 0 soit une racine de $f(x)$ (résultat du cours). Si k est impair, le dernier terme du polynôme $(x+1)^k$ quand on le développera, sera $1^k = 1$, tandis que le dernier terme du polynôme $(x-1)^k$ sera $(-1)^k = -1$ et donc en soustrayant le deuxième polynôme du premier, il restera le terme constant 2, ainsi 0 ne pourra pas être racine de $f(x)$. Par contre, si k est pair $(-1)^k = 1$ et donc en soustrayant le deuxième polynôme du premier, les deux termes constants s'annuleront et le polynôme résultant de la soustraction n'aura pas de terme constant. Ainsi si k est pair, 0 sera toujours une racine de $f(x)$ et donc $f(x)$ sera divisible par x.

Exercice 6.

a) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

b) $2a^6 - 6a^4 + 6a^2 - 2 = 2(a^6 - 1) - 6a^2(a^2 - 1) = 2\left[(a^2)^3 - 1\right] - 6a^2(a^2 - 1) = 2(a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) - 6a^2(a^2 - 1) = 2(a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1 - 3a^2) = 2(a^2 - 1)(a^4 - 2a^2 + 1) = 2(a+1)(a-1)(a^2 - 1)^2 = 2(a+1)(a-1)\left[(a+1)(a-1)\right]^2 = 2(a+1)^3(a-1)^3$

c) $54a^6 - 2 = 2(27a^6 - 1) = 2\left[(3a^2)^3 - 1\right] = 2(3a^2 - 1)(9a^4 + 3a^2 + 1)$

d) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

e) $xy - 9x^3y = xy(1 - 9x^2) = xy(1 - 3x)(1 + 3x)$

f) $(ab + a + 1)^2 - (b + a + 1)^2 = a^2b^2 + 2ab(a + 1) + (a + 1)^2 - \left[b^2 + 2b(a + 1) + (a + 1)^2\right] = a^2b^2 + 2ab(a + 1) - b^2 - 2b(a + 1) = b^2(a^2 - 1) + 2b\left[a(a + 1) - (a + 1)\right] = b^2(a^2 - 1) + 2b(a^2 + a - a + 1) = b^2(a^2 - 1) + 2b(a^2 - 1) = (a^2 - 1)(b^2 + 2b) = (a + 1)(a - 1)b(b + 2)$

g) $(x^2-1)^2-(x+1)(x-1)^3 = (x-1)^2(x+1)^2-(x+1)(x-1)^3 = (x-1)^2(x+1)\left[(x + 1) - (x - 1)\right] = (x-1)^2(x+1)2$

h) $a^2 - 2ab - 3b^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 4b^2 = (a - b)^2 - 4b^2 = (a - b + 2b)(a - b - 2b) = (a + b)(a - 3b)$

i) $x(1 - y + x) - y = x - xy + x^2 - y = x(1 + x) - y(x + 1) = x(x + 1) - y(x + 1) = (x + 1)(x - y)$

j) $x^3 - 3x^2 + 9x - 27 = x^2(x - 3) + 9(x - 3) = (x - 3)(x^2 + 9)$

k) $a^8 - 256 = \left[(a^4)^2 - (16)^2\right] = (a^4 - 16)(a^4 + 16) = (a^2 - 4)(a^2 + 4)(a^4 + 16) = (a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)(a^4 + 16)$

l) $b^8 - 2b^4 + 1 = (b^4 - 1)^2 = \left[(b^2 - 1)(b^2 + 1)\right]^2 = \left[(b - 1)(b + 1)(b^2 + 1)\right]^2 = (b - 1)^2(b + 1)^2(b^2 + 1)^2$

m) $(x - 3)^3 + (y - 5)^3 = \left[(x - 3) + (y - 5)\right]\left[(x - 3)^2 - (x - 3)(y - 5) + (y - 5)^2\right] = (x + y - 8)(x^2 - 6x + 9 - xy + 5x + 3y - 15 + y^2 - 10y + 25) = (x + y - 8)(x^2 + y^2 - xy - x - 7y + 19)$

n) $x^2 + 3x - 4y^2 + 6y = x^2 - 4y^2 + 3(x + 2y) = (x - 2y)(x + 2y) + 3(x + 2y) = (x + 2y)(x - 2y + 3)$

Exercice 7. On cherche dans chaque cas deux nombres entiers m et n tels que $m + n = b$ et $m \cdot n = a \cdot c$ pour écrire $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{m}{a})(x + \frac{n}{a})$. Le dernière forme donnée est la factorisation dans $\mathbb{Z}[x]$.

a) On trouve $m = 7$ et $n = -5$, et $x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$.

b) On trouve $m = -7$ et $n = 5$, et $x^2 - 2x - 35 = (x - 7)(x + 5)$.

c) On ne trouve pas de m et de n adéquat ; la raison en est que $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$ n'est pas un carré parfait. Avec $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, la formule de factorisation du trinôme donne $x^2 - 2x - 1 = (x - (\frac{2+2\sqrt{2}}{2}))(x - (\frac{2-2\sqrt{2}}{2})) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$ qui n'est pas dans $\mathbb{Z}[x]$.

d) On trouve $m = -6$ et $n = 1$, et $3x^2 - 5x - 2 = 3(x - \frac{6}{3})(x + \frac{1}{3}) = 3(x - 2)(x + \frac{1}{3}) = (x - 2)(3x + 1)$.

e) On trouve $m = 22$ et $n = -3$, et $6x^2 + 19x - 11 = 6(x + \frac{22}{6})(x - \frac{3}{6}) = 6(x + \frac{11}{3})(x - \frac{1}{2}) = (3x + 11)(2x - 1)$.

f) On trouve $m = -47$ et $n = -1$, et $x^2 - 48x + 47 = (x - 47)(x - 1)$.

Exercice 8. Dans ces exercices, quand on ne voit pas rapidement une manière de factoriser le polynôme, il nous faut trouver des racines de ce polynôme. Une astuce consiste à chercher ces racines parmi les diviseurs du terme constant du polynôme que l'on doit factoriser.

a) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 11x - 21$, on peut essayer avec $x = -3$, $f(-3) = -27 + 81 - 33 - 21 = 0$, ainsi $f(x)$ se divise par $(x + 3)$. Effectuons cette division avec le schéma de Horner

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 9 & 11 & -21 \\ -3 & & -3 & -18 & 21 \\ \hline & 1 & 6 & -7 & 0 \end{array}$$

Ainsi $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = (x + 3)(x^2 + 6x - 7) = (x + 3)(x - 1)(x + 7)$.

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$, on peut essayer comme racine $x = 3$, ce qui nous donne $f(3) = 0$ et donc $f(x)$ est divisible par $(x - 3)$, division que l'on effectue par le schéma de Horner.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 2 & -16 & -2 & 15 \\ 3 & & 3 & 15 & -3 & -15 \\ \hline & 1 & 5 & -1 & -5 & 0 \end{array}$$

Ainsi $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = (x - 3)(x^3 + 5x^2 - x - 5) = (x - 3)\left[x^2(x + 5) - 1(x + 5)\right] = (x - 3)(x + 5)(x^2 - 1) = (x - 3)(x + 5)(x - 1)(x + 1)$.

c) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 16x - 48 = x^4(x + 3) - 16(x + 3) = (x + 3)(x^4 - 16) = (x + 3)(x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x + 3)(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

d) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$, ici on trouve que 1 est une racine de $f(x)$ et donc que $f(x)$ est divisible par $x - 1$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & 13 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Ainsi $x^4-3x^3+3x^2-3x+2 = (x-1)(x^3-2x^2+x-2) = (x-1)\left[x^2(x-2)+1(x-2)\right] = (x-1)(x-2)(x^2+1)$.

e) $f(x) = x^3+2x^2-5x-6$, ici, en essayant successivement tous les diviseurs de -6, on voit que -1, 2 et -3 sont des racines de $f(x)$, et donc $x^3+2x^2-5x-6 = (x+1)(x-2)(x+3)$.

f) $f(x) = x^4-7x^3+17x^2-17x+6$, on trouve que 2 est une racine de $f(x)$ et donc que $f(x)$ est divisible par $x-2$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -7 & +17 & -17 & +6 \\ 2 & & 2 & -10 & 14 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & -3 & 0 \end{array}$$

Ainsi $x^4-7x^3+17x^2-17x+6 = (x-2)(x^3-5x^2+7x-3)$. Maintenant on cherche des racines de x^3-5x^2+7x-3, et on trouve que 1 en est une, effectuons la division par Horner :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & & 1 & -4 & 3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

Ainsi $x^4-7x^3+17x^2-17x+6 = (x-2)(x-1)(x^2-4x+3) = (x-2)(x-1)(x-1)(x-3) = (x-2)(x-1)^2(x-3)$.

g)

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^4+13x^3-13x-6 = 6(x^4-1)+13x(x^2-1) = 6(x^2-1)(x^2+1)+13x(x^2-1) \\ &= (x^2-1)\left[6(x^2+1)+13x\right] = (x-1)(x+1)(6x^2+13x+6). \end{aligned}$$

Pour chercher les racines du dernier facteur, on peut utiliser Viète ou la formule du trinôme (ce dernier nous donne les racines $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{2}{3}$), ainsi $f(x) = (x-1)(x+1)(3x+2)(2x+3) = 6(x-1)(x+1)(x+\frac{3}{2})(x+\frac{2}{3})$.

Exercice 9.

a) Pour le polynôme $2x^2-3x-7$, la formule du trinôme nous donne $b^2-4ac = (-3)^2-4\cdot 2\cdot(-7) = 65$,

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \begin{cases} \frac{3+\sqrt{65}}{4} \\ \frac{3-\sqrt{65}}{4} \end{cases}$$

Ainsi on peut factoriser $f(x)$ de la manière suivante :

$$f(x) = 2\left(x-\tfrac{3+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x-\tfrac{3-\sqrt{65}}{4}\right)$$

b) Pour le polynôme $3x^2-6x+5$, la formule s'arrête à $b^2-4ac = 6^2-4\cdot 3\cdot 5 = -24$, dans ce cas, le polynôme n'a même pas de racine réelle.