Exercice 1.

a) Cette affirmation est fausse. En effet, si on prend $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2$, le produit $h(x)$ est égal à $h(x) = 2x^2 + 2$ qui est de degré 2. Comme le degré de $f(x)$ est 2 et celui de $g(x)$ est 0, Le degré de $h(x)$ est bien supérieur à celui de $g(x)$, mais n'est pas supérieur à celui de $f(x)$.

b) Cette affirmation est fausse. En effet, en prenant cette fois deux polynômes de degré 0, $f(x) = 1$ et $g(x) = 2$, le produit $h(x) = 2$ est de degré 0. Ainsi le degré de $h(x)$ n'est supérieur ni à celui de $f(x)$, ni à celui de $g(x)$.

c) Cette affirmation est vraie car lorsque l'on divise un polynôme de degré n par un polynôme de degré m, avec $n \geq m$, le quotient sera de degré $n - m$. Donc si $n = m$ alors le quotient sera de degré $n - m$, c'est à dire 0.

Attention, si dans un de ces exercices on choisit le polynôme $f(x) = 0$, il faut savoir que son degré est $-\infty$ par convention. Ainsi, par exemple, si on multiplie les polynômes $f(x) = 0$ et $g(x) = x^2 + 1$, le produit sera $h(x) = 0$ qui sera de degré $-\infty$.

Exercice 2.

a)

$$
\begin{array}{rrr|ll}
4x^2 & -5x & +1 & 2x & -1 \\ \cline{4-5}
-4x^2 & +2x & & 2x & -\frac{3}{2} \\ \cline{1-2}
 & -3x & & & \\
 & 3x & -\frac{3}{2} & & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{1}{2} & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est $4x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)\left(2x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$.

b)

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & & -x & +12 & x & -4 & \\ \cline{5-7}
-x^3 & +4x^2 & & & x^2 & +4x & +15 \\ \cline{1-2}
 & 4x^2 & & & & & \\
 & -4x^2 & +16x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 15x & & & & \\
 & & -15x & +60 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 72 & & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est $x^3 - x + 12 = (x - 4)(x^2 + 4x + 15) + 72$.

c)

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
x^4 & -2x^3 & & -7x & +3 & x^2 & +x & +2 \\ \cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -2x^2 & & & x^2 & -3x & +1 \\ \cline{1-3}
 & -3x^3 & -2x^2 & & & & & \\
 & 3x^3 & +3x^2 & +6x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & -x & & & & \\
 & & -x^2 & -x & -2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & +1 & & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est $x^4 - 2x^3 - 7x + 3 = (x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) - 2x + 1$.

d)

$$
\begin{array}{rrr|ll}
6x^4 & +x^2 & +1 & 2x^2 & +1 \\ \cline{4-5}
-6x^4 & -3x^2 & & 3x^2 & -1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^2 & & & \\
 & 2x^2 & +1 & & \\ \cline{2-3}
 & & 2 & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est $6x^4 + x^2 + 1 = (2x^2 + 1)(3x^2 - 1) + 2$.

e)

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
-2x^3 & & -3x & +1 & 3x^3 & +x^2 & -1 \\ \cline{5-7}
2x^3 & +\frac{2}{3}x^2 & & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & \\ \cline{1-4}
 & \frac{2}{3}x^2 & -3x & +\frac{1}{3} & & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est $-2x^3 - 3x + 1 = (3x^3 + x^2 - 1)\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{3}$.

Exercice 3. Commençons par effectuer la division euclidienne de $f(x)$ par $x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|llll}
3x^4 & & -2x^2 & +4x & -3 & x & +2 & & \\ \cline{6-9}
-3x^4 & -6x^3 & & & & 3x^3 & -6x^2 & +10x & -16 \\ \cline{1-2}
 & -6x^3 & & & & & & & \\
 & 6x^3 & +12x^2 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 10x^2 & & & & & & \\
 & & -10x^2 & -20x & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -16x & & & & & \\
 & & & +16x & +32 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 29 & & & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est donc

$$f(x) = (x + 2)(3x^3 - 6x^2 + 10x - 16) + 29.$$

Si on évalue ce $f(x)$ en -2, le premier produit tombe et il reste $f(-2) = 29$. Faisons maintenant la vérification par substitution :

$$
\begin{aligned}
f(-2) &= 3 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 3 \\
&= 3 \cdot 16 - 2 \cdot 4 - 8 - 3 \\
&= 48 - 8 - 8 - 3 \\
&= 29.
\end{aligned}
$$

Exercice 4.

Dans chaque cas, nous allons effectuer la division euclidienne de $f(x)$ par le polynôme $x - a$ ce qui nous donnera $f(x) = (x - a)q(x) + r(x)$ où $q(x)$ sera le quotient et $r(x)$ le reste. Ainsi on pourra facilement calculer $f(a) = (a - a)q(a) + r(a) = r(a)$.

a)

$$
\begin{array}{rrrr|ll}
3x^3 & -4x^2 & +x & +1 & x & -1 \\ \cline{5-6}
-3x^3 & +3x^2 & & & 3x^2 & -x \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & & & & \\
 & x^2 & -x & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 1 & &
\end{array}
$$

$f(x) = (x - 1)(3x^2 - x) + 1$, donc $f(1) = 1$.

b)

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & & +2x & +3 & x & -3 & \\ \cline{5-7}
-x^3 & +3x^2 & & & x^2 & +3x & +11 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & & & & & \\
 & -3x^2 & +9x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 11x & & & & \\
 & & -11x & +33 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 36 & & &
\end{array}
$$

$f(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 11) + 36$, donc $f(3) = 36$.

c)

$$\begin{array}{rrrr|lll}
4x^3 & +2x^2 & +3x & +8 & x & +2 & \\ \cline{5-7}
-4x^3 & -8x^2 & & & 4x^2 & -6x & +15 \\ \cline{1-2}
 & -6x^2 & & & & & \\
 & 6x^2 & +12x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 15x & & & & \\
 & & -15x & -30 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -22 & & &
\end{array}$$

$f(x) = (x + 2)(4x^2 - 6x + 15) - 22$, donc $f(-2) = -22$

d)

$$\begin{array}{rrrrr|llll}
3x^4 & -4x^3 & -x^2 & +2x & +4 & x & +8 & & \\ \cline{6-9}
-3x^4 & -24x^3 & & & & 3x^3 & -28x^2 & +223x & -1782 \\ \cline{1-2}
 & -28x^3 & & & & & & & \\
 & 28x^3 & +224x^2 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 223x^2 & & & & & & \\
 & & -223x^2 & -1784x & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -1782x & & & & & \\
 & & & +1782x & +14256 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 14260 & & & &
\end{array}$$

$f(x) = (x + 8)(3x^3 - 28x^2 + 223x - 1782) + 14260$, donc $f(-8) = 14260$.

e)

$$\begin{array}{rrrrrr|lllll}
x^5 & -6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -9 & x & -9 & & & \\ \cline{7-11}
-x^5 & +9x^4 & & & & & x^4 & +3x^3 & +32x^2 & +289x & +2604 \\ \cline{1-2}
 & 3x^4 & & & & & & & & & \\
 & -3x^4 & +27x^3 & & & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 32x^3 & & & & & & & & \\
 & & -32x^3 & +288x^2 & & & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 289x^2 & & & & & & & \\
 & & & -289x^2 & +2601x & & & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 2604x & & & & & & \\
 & & & & -2604x & +23436 & & & & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 23427 & & & & &
\end{array}$$

$f(x) = (x - 9)(x^4 + 3x^3 + 32x^2 + 289x + 2604) + 23427$, donc $f(9) = 23427$.

Exercice 5.

Pour que a soit une racine de $f(x)$, il faut que le polynôme $(x - a)$ soit facteur de $f(x)$. En effet, si c'est le cas $f(x) = (x - a)q(x)$, où $q(x)$ est le quotient de la division euclidienne et le reste est nul. Ainsi $f(a) = (a - a)q(a) = 0$ ce qui signifie que a est une racine de $f(x)$. Pour cet exercice nous allons donc effectuer la division euclidienne de $f(x)$ par $(x - a)$ et regarder si le reste est nul ou pas.

a)

$$\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & -4x^2 & +9x & -10 & x & -2 & \\ \cline{5-7}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2 & -2x & +5 \\ \cline{1-2}
 & -2x^2 & & & & & \\
 & 2x^2 & -4x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x & & & & \\
 & & -5x & +10 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Le reste est égal à 0, ainsi on peut écrire $f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 5)$ et voir que $f(2) = 0$ et donc que 2 est une racine de $f(x)$.

b)

$$\begin{array}{rrrr|lll}
4x^3 & -4x^2 & +7x & +1 & x & +4 & \\ \cline{5-7}
-4x^3 & -16x^2 & & & 4x^2 & -20x & +87 \\ \cline{1-2}
 & -20x^2 & & & & & \\
 & 20x^2 & +80x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 87x & & & & \\
 & & -87x & -348 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -347 & & &
\end{array}$$

Dans ce cas, $f(-4) = -347$ donc -4 n'est pas une racine de $f(x)$.

c) Si on fait comme les autres cas, on devrait faire la division de $f(x)$ par $(x - \frac{1}{2})$, cependant on préfère travailler avec des coefficients entiers. On prendra donc comme diviseur $d(x) = (2x - 1)$. Le résultat sera le même car $d(\frac{1}{2}) = 0$ et le polynôme $(x - \frac{1}{2})$ évalué en $\frac{1}{2}$ est aussi égal à 0.

$$\begin{array}{rrrrr|llll}
8x^4 & -2x^3 & +7x^2 & -2x & -1 & 2x & -1 & & \\ \cline{6-9}
-8x^4 & +4x^3 & & & & 4x^3 & +x^2 & +4x & +1 \\ \cline{1-2}
 & 2x^3 & & & & & & & \\
 & -2x^3 & +x^2 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 8x^2 & & & & & & \\
 & & -8x^2 & +4x & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2x & & & & & \\
 & & & -2x & +1 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

$f(\frac{1}{2}) = 0$, donc $\frac{1}{2}$ est une racine de $f(x)$.

d)

$$\begin{array}{rrrr|lll}
2x^3 & +9x^2 & -17x & +6 & x & +6 & \\ \cline{5-7}
-2x^3 & -12x^2 & & & 2x^2 & -3x & +1 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & & & & & \\
 & 3x^2 & +18x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & x & & & & \\
 & & -x & -6 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

$f(-6) = 0$ donc -6 est une racine de $f(x)$.

Exercice 6. Posons $f(x) = kx^3 + 2x^2 - 3x + 4$. Pour que $x + 1$ soit facteur de $f(x)$, il faut que lors de la division euclidienne de $f(x)$ par $x + 1$, le reste soit égal à 0. En effet, on pourra alors écrire $f(x) = (x + 1)q(x)$ où $q(x)$ sera le quotient de la division.

Méthode courte. Un corollaire du cours nous dit que $f(x)$ est divisible par $x + 1$ si et seulement si $f(-1) = 0$. Or ici,

$$f(-1) = k(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) + 4 = -k + 2 + 3 + 4 = -k + 9,$$

et donc $f(-1) = 0$ si et seulement si $-k+9 = 0$, c'est-à-dire que $f(x)$ est divisible par $x+1$ si et seulement si $k = 9$.

Méthode longue. Effectuons la division, puis choisissons un k tel que le reste est égal à 0.

$$\begin{array}{rrrr|lll}
kx^3 & +2x^2 & -3x & +4 & x & +1 & \\ \cline{5-7}
-kx^3 & -kx^2 & & & kx^2 & +(2-k)x & +(k-5) \\ \cline{1-2}
 & (2-k)x^2 & & & & & \\
 & -(2-k)x^2 & -(2-k)x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & (k-5)x & & & & \\
 & & -(k-5)x & -(k-5) & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 4-(k-5) & & &
\end{array}$$

Ainsi le reste de la division est $4-(k-5)$. On cherche maintenant un k pour que le reste $4-(k-5)$ soit égal à 0. On pose alors $4-(k-5)=0$ et en résolvant cette équation, on trouve $k=9$. En remplaçant k par 9 dans $f(x)$ on obtient $f(x)=9x^3+2x^2-3x+4=(x+1)(9x^2-7x+4)$.

Exercice 7.

a) $4x+xy=x(4+y)$ correspond à **J)**

b) $3x+12=3(x+4)=3(4+x)$ correspond à **G)**

c) $x^2+5y^2z=y^2(x+5z)$ correspond à **F)**

d) $21y-14=7(3y-2)$ correspond à **C)**

e) $-4x-2y=-2(2x+y)$ correspond à **D)**

f) $8x^2z+4z=4z(2x^2+1)$ correspond à **I)**

g) $-18xy-12x=-6x(3y+2)$ correspond à **K)**

h) $6x^2y+15xy^3=3xy(2x+5y^2)$ correspond à **A)**

i) $16x+24y+8=8(2x+3y+1)$ correspond à **E)**

j) $x^3+3x^2z+4x^2=x^2(x+3z+4)$ correspond à **B)**

k) $-5xyz-10z-15=-5(xyz+2z+3)$ correspond à **H)**

Exercice 8. Dans cet exercice, il s'agit de reconnaître quelle identité appliquer à quel polynôme.

a) $8x^3+27x^3=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

b) $4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2$

c) $\frac{1}{125}x^3-\frac{3}{10}x^2yz+\frac{15}{4}xy^2z^2-\frac{125}{8}y^3z^3=(\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}yz)^3$

d) $6x^2-24y^2=6(x^2-4y^2)=6(x-2y)(x+2y)$

e) $81s^2-72st+64t^2$, ce polynôme est irréductible.