Exemple : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+3/n}{3-1/n}$ 1. Factoriser par le plus haut degré.

$$= \frac{2 + 3\lim\limits_{n\to\infty} 1/n}{3 - \lim\limits_{n\to\infty} 1/n}$$ 2. Appliquer les règles algébriques.

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ car étant donné $\varepsilon > 0$, prenons $N \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$ alors on a

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon .$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n-1} = \dfrac{2+3\cdot 0}{3-1\cdot 0} = \dfrac{2}{3}$.

la limite est non nulle donc (iii) s'applique.

fin 07/10

(Annonces
- Evaluation du cours.
- Exercices de rédaction.)

À savoir : $\forall p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} n! = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$

Pas de limite

forme indéterminée

$\lim v_n$ \\ $\lim u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
PL	PL	?	?	?

Tableau 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$

$\lim v_n$ \\ $\lim u_n$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell = 0$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \cdot \ell'$	0	$\ell \cdot \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell' = 0$	0	0	0	?	?	?
$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell \cdot \ell'$	0	$\ell \cdot \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
PL	PL	?	PL	?	?	?

(admis)

Tableau 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n)$

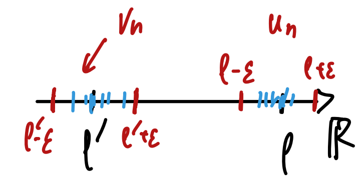
- Tableau symétrique grâce à la commutativité de + et ·.

Propriété d'ordre des limites

Prop : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell' \in\mathbb{R}$

$$\underbrace{\text{Si } \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ u_n \leq v_n}_{(*)} \quad \text{alors} \quad \ell \leq \ell'$$

Preuve : Par l'absurde, supposons $\ell > \ell'$. Soit $\varepsilon = \frac{\ell-\ell'}{4} > 0$.



$\exists n_1 \geq N_0$ tq $|v_{n_1} - \ell'| < \varepsilon$ et $|u_{n_1} - \ell| < \varepsilon$

Donc $v_{n_1} < \ell' + \varepsilon < \ell - \varepsilon < u_{n_1}$ ce qui contredit $(*)$.

Donc $\ell \leq \ell'$. $\blacksquare$

« Les inégalités larges passent à la limite »

⚠ Les inégalités strictes ne sont pas toujours préservées !

Eg : $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$: on a $u_n > 0$, $\forall n$ mais $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3.5 Critères de convergence

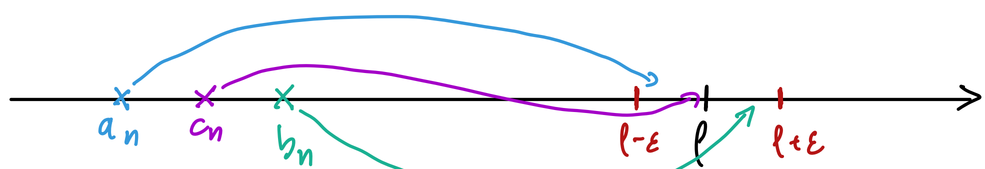
Thm (d'encadrement / des 2 gendarmes). Soit (a_n), (b_n) et (c_n) des suites.

Si :

- $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\quad a_n \leq c_n \leq b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Preuve :



Soit $\varepsilon > 0$. On a :

- $\forall n \geq n_0$, $\quad a_n \overset{(1)}{\leq} c_n \overset{(2)}{\leq} b_n$

- $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \quad |a_n - \ell| \overset{(3)}{<} \varepsilon$
- $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_2, \quad |b_n - \ell| \overset{(4)}{<} \varepsilon$

On pose $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Pour $n \geq n_3$

$$\ell - \varepsilon \overset{(3)}{<} a_n \overset{(1)}{\leq} c_n \overset{(2)}{\leq} b_n \overset{(4)}{<} \ell + \varepsilon \implies |c_n - \ell| < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

<u>Exemple :</u>

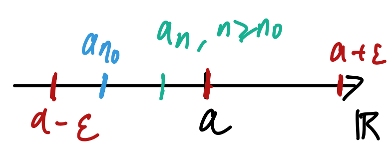
$$\boxed{\frac{-1}{n^2+1}} \leq \underbrace{\frac{\cos(\sqrt{n} + 3n^3)}{1+n^2}}_{\text{donc (Thm d'encadrem}^{\text{t}}\text{)}} \leq \boxed{\frac{1}{n^2+1}}$$

$$\frac{-1}{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \frac{\cos(\sqrt{n} + 3n^3)}{1+n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \frac{1}{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Thm (convergence des suites monotones). Toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) converge et sa limite est $a = \sup(a_n) = \sup\{a_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ (resp. est $a = \inf(a_n) = \inf\{a_n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$)

<u>Preuve :</u> Soit $a = \sup(a_n) < +\infty$ car (a_n) majoré. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

- $a_n \leq a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ⎫
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, a_{n_0} \geq a - \varepsilon$ ⎭ Propriétés du sup.
- $\forall n \geq n_0, \quad a_n \geq a_{n_0}$ (croissance).



On en déduit. $\forall n \geq n_0, \quad a - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq a \implies |a_n - a| \leq \varepsilon$

Ceci montre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\blacksquare$

<u>Exemple :</u> $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ définie pour $n \geq 1$ $\left(a_1 = 1, \; a_2 = 1 + \frac{1}{4}, \; a_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \dots\right)$

- On a $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (a_n) est (strictement) croissante.
- Montrons que (a_n) est majorée (astuce) :

$$a_n \leq a_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(2\ell+1)^2} \leq 1 + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(2\ell)^2}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell^2} = 1 + \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} a_n = 1 + \frac{1}{2} a_n.$$

On a donc $a_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} a_n \iff \frac{1}{2} a_n \leqslant 1 \iff a_n \leqslant 2$.

(cette technique fonctionne pour $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ avec $p > 1$)

- Donc (a_n) est croissante et majorée (par 2) donc elle converge. (la limite est $\frac{\pi^2}{6}$, mais nous ne l'avons pas démontré).

<u>Thm (critère de d'Alembert)</u>. Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite telle que $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et telle que (admis)

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

- Si $\ell < 1$: alors (x_n) converge vers 0.
- Si $\ell > 1$: alors (x_n) diverge
- Si $\ell = 1$: alors on ne peut pas conclure

<u>Exemple</u> : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et (x_n) définie par $x_n = \frac{\alpha^n}{n!}$.

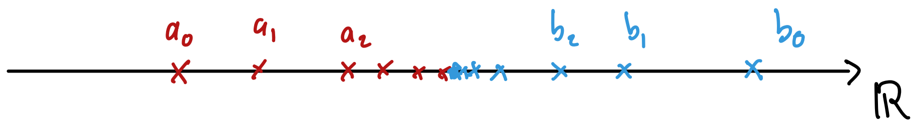
On a $$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|\alpha|^n} = |\alpha| \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{|\alpha|}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Donc par le critère de d'Alembert (avec $\ell = 0$), (x_n) converge vers 0.

<u>Thm (suites adjacentes)</u>. Soit (a_n) une suite croissante et (b_n) une suite décroissante telles que $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Alors (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

<u>Preuve</u> :



La suite $(b_n - a_n)$ est décroissante (somme de (b_n) et $(-a_n)$, deux suites décroissantes).

Comme de plus $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ alors $b_n - a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a $a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc par le critère de convergence des suites monotones : $\begin{cases} (a_n) \nearrow \text{ et majorée : converge.} \\ (b_n) \searrow \text{ et minorée : converge.} \end{cases}$

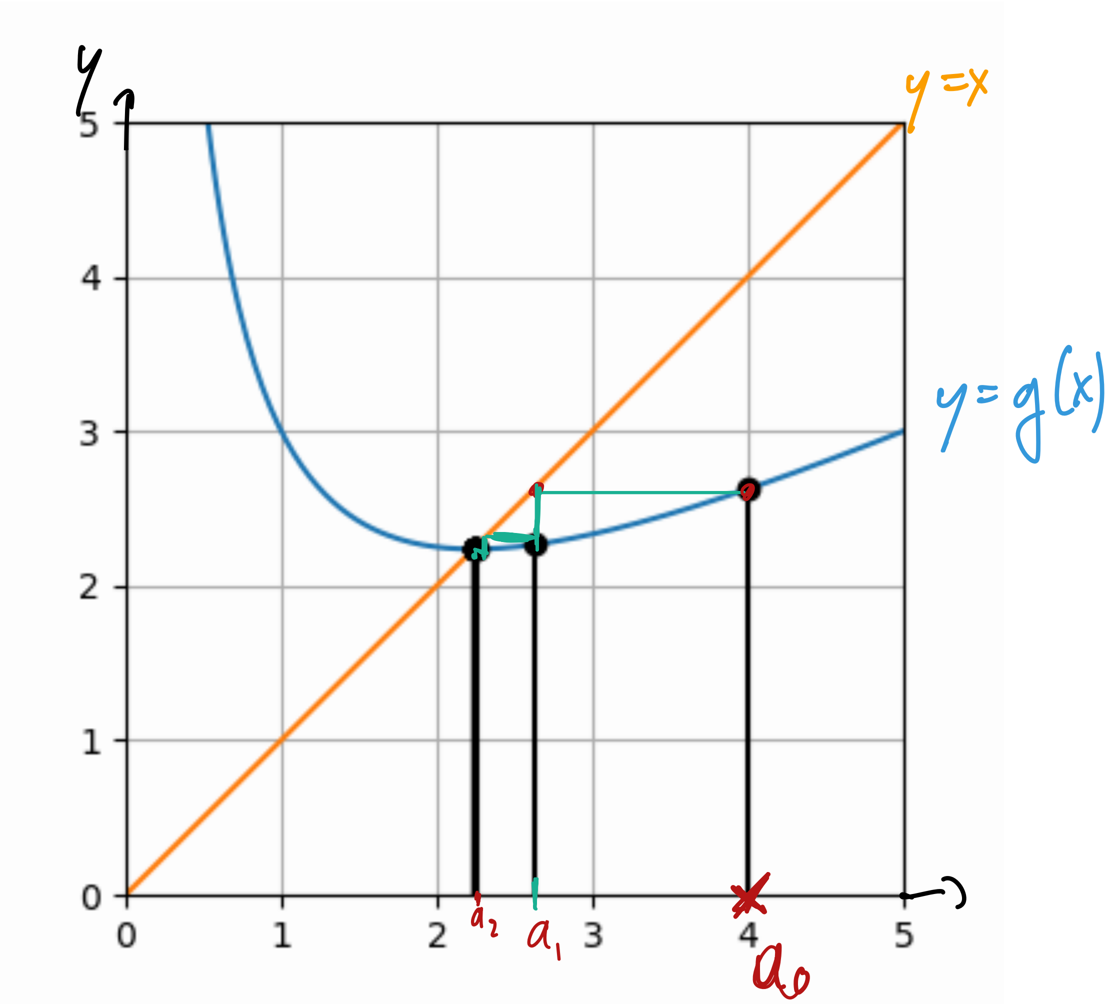
On a $0 = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ■

⚠ Si (a_n) et (b_n) divergent on peut avoir $(a_n + b_n)$ converge !

3.6 Suites définies par récurrence

Exemple : $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = g(a_n), \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$ où $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right). \end{array} \right.$

$= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$



fin 10/10