

Partie I : Racines et polynômes complexes

Exercice 1.

Déterminer toutes les racines complexes suivantes et les représenter graphiquement.

- a) Les racines 5-èmes de 1.
- b) Les racines carrées de $-5 + 12i$
- c) Les racines 4-èmes de $-2i$
- d) Les racines cubiques de $-\sqrt{3} + i$

Solution.

- a) On cherche à résoudre $z^5 = 1$, avec la méthode des exponentielles. Puisque $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$ (on peut le voir à l'aide d'un dessin), nous pouvons écrire sous forme polaire $1 = 1e^{i(0+2k\pi)} = e^{i2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On multiplie ensuite nos exposants par $\frac{1}{5}$:

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}, \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

On obtient ainsi les 5 racines 5-èmes de 1 :

$$z_0 = e^{i\frac{2 \cdot 0 \pi}{5}} = e^0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}, \quad z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}, \quad z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

(voir Fig. 1 (a)).

- b) Nous résolvons l'équation $z^2 = -5 + 12i$ avec la méthode cartésienne : posons $z = x + iy$, qui donne l'équation

$$x^2 - y^2 + i2xy = -5 + 12i.$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, on déduit

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (1) \\ 2xy = 12 & (2) \end{cases}$$

Pour la simplification des calculs, nous ajoutons l'équation des modules :

$$|z^2| = |-5 + 12i| \implies x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \quad (3).$$

En travaillant les équations (1) et (3), nous obtenons

$$\begin{cases} (1) + (3) : & 2x^2 = 8 & \implies & x = \pm 2 \\ (3) - (1) : & 2y^2 = 18 & \implies & y = \pm 3. \end{cases}$$

Enfin, l'équation (2) indique que x et y doivent avoir le même signe, ce qui nous donne les deux solutions

$$z_0 = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_1 = -2 - 3i.$$

(voir Fig. 1 (b)).

c) On cherche à résoudre $z^4 = -2i$, avec la méthode des exponentielles. On a $|-2i| = 2$ et $\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$ (on peut le voir à l'aide d'un dessin). Donc, $-2i = 2e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En amplifiant nos exposants par $1/4$, on obtient

$$z_k = 2^{\frac{1}{4}} e^{i(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})} = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{(4k-1)\pi}{8}}, \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, 3.$$

On obtient ainsi les racines 4-èmes de $-2i$:

$$z_0 = \sqrt[4]{2} e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{3\pi}{8}}, \quad z_2 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{7\pi}{8}}, \quad z_3 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{11\pi}{8}}$$

(voir Fig. 1 (c)).

d) On cherche les racines 3-èmes de $-\sqrt{3}+i$. On a $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\arg(-\sqrt{3}+i) = \frac{5\pi}{6}$. Donc, $-\sqrt{3}+i = 2e^{i(\frac{5\pi}{6}+2k\pi)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En amplifiant nos exposants par $1/3$, on obtient $2^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})} = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{(5+12k)\pi}{18}}$. Pour $k = 0, 1, 2$, on obtient les 3 racines cubiques de $-\sqrt{3}+i$:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{5\pi}{18}}, \quad z_1 = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{17\pi}{18}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{29\pi}{18}}$$

(voir Fig. 1 (d)).

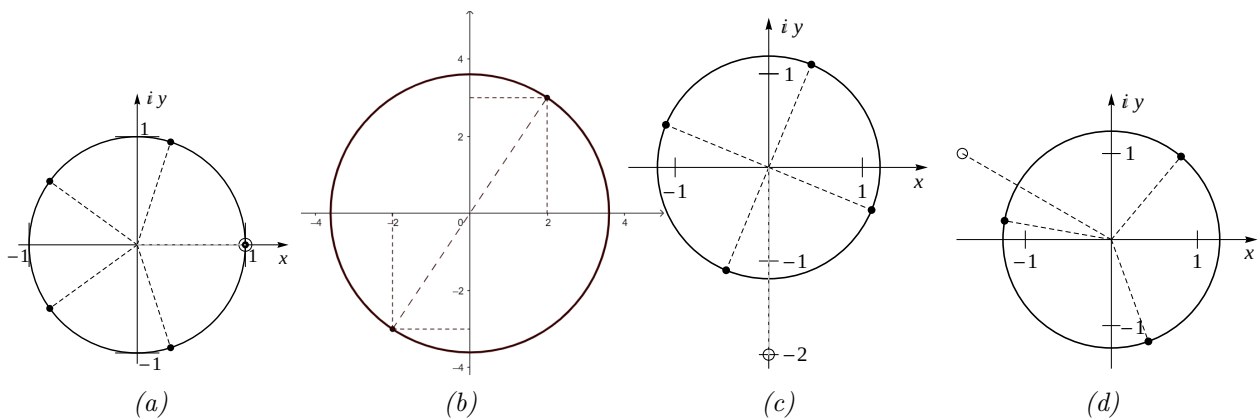


FIGURE 1 – Représentation graphique des solutions dans le plan complexe.

Exercice 2.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$

b) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Solution.

a) Nous utilisons d'abord la complétion du carré pour simplifier l'équation :

$$0 = z^2 + 6z + 12 - 4i = (z^2 + 6z + 9) - 9 + 12 - 4i = (z + 3)^2 + 3 - 4i \implies (z + 3)^2 = -3 + 4i.$$

Cherchons maintenant les racines carrées de $-3 + 4i$ avec la méthode cartésienne, c'est à dire les solutions de l'équation

$$(x + iy)^2 = -3 + 4i \implies x^2 - y^2 + i2xy = -3 + 4i.$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, on déduit

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \end{cases}$$

Pour la simplification des calculs, nous ajoutons l'équation des modules :

$$|x + iy|^2 = |-3 + 4i| \implies x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (3).$$

En travaillant les équations (1) et (3), nous obtenons

$$\begin{cases} (1) + (3) : & 2x^2 = 2 & \implies & x = \pm 1 \\ (3) - (1) : & 2y^2 = 8 & \implies & y = \pm 2. \end{cases}$$

Enfin, l'équation (2) indique que x et y doivent avoir le même signe, ce qui nous donne les deux racines

$$1 + 2i \quad \text{et} \quad -1 - 2i.$$

En revenant à l'équation originale, nous déduisons de ce qui précède que

$$(z + 3)^2 = -3 + 4i \implies z + 3 = \pm(1 + 2i) \implies z = -3 \pm (1 + 2i)$$

d'où les deux solutions

$$z_1 = -2 + 2i \quad \text{et} \quad -4 - 2i.$$

b) Méthode 1 : L'équation est équivalente à

$$(z^3)^2 - 2z^3 + 2 = 0.$$

Cette équation étant une équation du 2^{ème} degré pour z^3 , on peut la résoudre à l'aide de la méthode du discriminant. On a

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4.$$

Les deux racines complexes de -4 sont $-2i$ et $2i$, et donc, on déduit que

$$z^3 = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

On résout encore $z^3 = 1 + i$ et $z^3 = 1 - i$ pour trouver toutes les solutions de $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.
Commençons par $z^3 = 1 + i$. Cette équation consiste à trouver les racines 3^{èmes} de $1 + i$. On a $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ (on peut le voir à l'aide d'un dessin). Donc, $1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Amplifiant nos exposants par $1/3$, on obtient $\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi + 8k\pi}{12}}$. En prenant $k = 0, 1, 2$, on trouve les solutions de $z^3 = 1 + i$:

$$z_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

Passons maintenant à $z^3 = 1 - i$. Cette équation consiste à trouver les racines 3^{èmes} de $1 - i$. On a $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ (on peut le voir à l'aide d'un dessin). Donc, $1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Amplifiant nos exposants par $1/3$, on obtient $\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}e^{i(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{-\pi + 8k\pi}{12}}$. En prenant $k = 0, 1, 2$, on trouve les solutions de $z^3 = 1 - i$ (appelons les z_3, z_4 et z_5 car z_0, z_1 et z_2 sont déjà utilisés ci-dessus) :

$$z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}, \quad z_4 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

On conclut donc que les solutions de $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ sont

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, & z_1 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, & z_2 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}} \\ z_3 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}, & z_4 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, & z_5 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Méthode 2 : En complétant le carré, on obtient que notre équation est équivalente à

$$(z^3 - 1)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^3 - 1)^2 = -1 = i^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = 1 \pm i.$$

En cherchant les solutions de $z^3 = 1 \pm i$ comme dans la méthode 1, nous trouvons les solutions de $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.

Exercice 3.

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}$ et, si possible, dans $\mathbb{R}$.

- a) $p(z) = z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 2z + 10$ (trouver une racine simple)
 b) $p(z) = \frac{1}{2}z^3 - 4z^2 + 7z - 6$, ($p(6) = 0$)
 c) $p(z) = z^3 - (3 + 3i)z^2 + (-2 + 9i)z + 6$ ($p(3) = 0$)

Solution.

- a) En testant des valeurs simples, nous trouvons que $z = i$ est une racine. Puisque les coefficients de p sont réels, nous en déduisons que $z = -i$ est aussi une racine. Nous effectuons la division euclidienne de p par $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrr}
 z^4 & -2z^3 & +11z^2 & -2z & +10 \\
 -(z^4 & & +z^2) & & \\
 \hline
 & -2z^3 & +10z^2 & -2z & +10 \\
 & -(2z^3 & & -2z) & \\
 \hline
 & & 10z & +10 & \\
 & & -(10z & +10) & \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array} & \begin{array}{l}
 z^2 + 1 \\
 \hline
 z^2 - 2z + 10
 \end{array}
 \end{array}$$

Ce qui nous donne

$$p(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 10)$$

qui est la factorisation dans $\mathbb{R}$, puisque les deux polynômes de degré 2 sont irréductibles dans $\mathbb{R}$. Pour trouver sa factorisation dans $\mathbb{C}$, il nous reste à trouver les racines de $z^2 - 2z + 10$, que nous trouvons par completion du carré :

$$0 = z^2 - 2z + 10 = z^2 - 2z + 1 + 9 = (z - 1)^2 + 9 \Leftrightarrow z - 1 = \pm 3i \Leftrightarrow z = 1 \pm 3i.$$

La factorisation dans $\mathbb{C}$ est donc

$$p(z) = (z - i)(z + i)(z - 1 + 3i)(z - 1 - 3i).$$

- b) Puisque $z = 6$ est une racine de $p(z)$, on fait la division euclidienne de $p(z)$ par $z - 6$.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrr}
 \frac{1}{2}z^3 & -4z^2 & +7z & -6 \\
 -(\frac{1}{2}z^3 & -3z^2) & & \\
 \hline
 & -z^2 & +7z & -6 \\
 & -(-z^2 & +6z) & \\
 \hline
 & & z & -6 \\
 & & -(z & -6) \\
 \hline
 & & & 0
 \end{array} & \begin{array}{l}
 z - 6 \\
 \hline
 \frac{1}{2}z^2 - z + 1
 \end{array}
 \end{array}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}z^3 - 4z^2 + 7z - 6 = \left(\frac{1}{2}z^2 - z + 1\right)(z - 6).$$

Factorisons maintenant $\frac{1}{2}z^2 - z + 1$ à l'aide de la méthode avec le discriminant.

On a $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 1$. Le discriminant est $b^2 - 4ac = 1 - 2 = -1$. Les deux racines carrées de -1 sont $\pm i$. Ainsi, on obtient comme racines de $\frac{1}{2}z^2 - z + 1$,

$$z_1 = \frac{-b + i}{2a} = 1 + i, \quad z_2 = \frac{-b - i}{2a} = 1 - i.$$

On conclut que

$$p(z) = \frac{1}{2}(z-1-i)(z-1+i)(z-6).$$

c) Puisque $z=3$ est une racine de $p(z)$, on fait donc la division euclidienne de $p(z)$ par $z-3$.

$$\begin{array}{r|l} z^3 - (3+3i)z^2 + (-2+9i)z + 6 & z-3 \\ -(z^3 - 3z^2) & \\ \hline -3iz^2 + (-2+9i)z + 6 & \\ -(-3iz^2 + 9iz) & \\ \hline -2z + 6 & \\ -(2z + 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On a donc

$$z^3 - (3+3i)z^2 + (-2+9i)z + 6 = (z^2 - 3iz - 2)(z-3)$$

Factorisons maintenant $z^2 - 3iz - 2$ à l'aide de la méthode avec le discriminant.

On a $a=1$, $b=-3i$ et $c=-2$. Le discriminant est $b^2 - 4ac = -9 + 8 = -1$. Les deux racines carrées de -1 sont $\pm i$. Ainsi, les racines de $z^2 - 3iz - 2$ sont

$$z_1 = \frac{-b+i}{2a} = 2i, \quad z_2 = \frac{-b-i}{2a} = i.$$

On conclut que

$$p(z) = (z-i)(z-2i)(z-3).$$

Exercice 4.

Vrai ou faux ?

- Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.
- Soient $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$. Alors on a $\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n a_0$.
- Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit purement imaginaire (c-à-d. sa partie réelle est nulle).
- Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1-i\sqrt{3})^n$ soit réel.

Solution.

a) VRAI.

En faisant une division polynomiale, on obtient que $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1 = (z^2 + 1)(z^4 + 2z^2 - 1)$. $(z^2 + 1)$ est donc un diviseur de $(z^6 + 3z^4 + z^2 - 1)$.

b) VRAI.

Comme $z_1, \dots, z_n$ sont racines du polynôme, on a

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

En comparant les termes de degré zéro des deux côtés de l'expression, on trouve la relation $a_0 = (-z_1)(-z_2) \cdots (-z_n) = \prod_{j=1}^n (-z_j) = (-1)^n \prod_{j=1}^n z_j$, d'où la formule de l'énoncé.

c) FAUX.

On calcule la puissance en utilisant la forme polaire

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right).$$

Ce nombre est purement imaginaire si et seulement si $\cos(n\frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{3}{2} + 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or, comme n doit être un entier, cette dernière condition ne peut être satisfaite pour k entier. L'énoncé est donc faux.

d) VRAI.

En utilisant de nouveau la forme polaire on obtient

$$(1 - i\sqrt{3})^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right).$$

Ce nombre est réel si et seulement si $\sin(n\frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{3} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi en prenant par exemple $n = 3$, on a que $(1 - i\sqrt{3})^3 = 2^3 \cos(\pi) = -8 \in \mathbb{Z}$.

Partie II : Limites de suites.

Définition. On dit qu'une suite $(a_n)_{n=1}^\infty$ **converge** (ou **tend**) vers $L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \{n \geq N \implies |a_n - L| \leq \varepsilon\}.$$

On note alors

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ (quand } n \rightarrow +\infty).$$

Exercice 5.

Montrer à l'aide de la définition de la limite que :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 1}{2n^3 + 1} = \frac{1}{2}$

c) $\forall p > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = 0$

Indications : 1) Il vous suffit de trouver un "seuil" $N \geq 1$ dépendant de ε qui satisfait la définition de limite.

2) On admettra sans démonstration que pour $p > 0$ (et donc en particulier pour $p = \frac{1}{2}$), la fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^p$ est strictement croissante. C'est-à-dire, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$. On aura les outils pour le montrer à la fin du chapitre 6.

Solution.

La démarche est la suivante : fixer $\varepsilon > 0$, puis "isoler n " à partir de l'inégalité $|a_n - L| \leq \varepsilon$ pour en déduire un "seuil" $N \geq 1$. Ce n'est pas demandé, mais nous montrons dans ce corrigé que ce seuil satisfait bien la définition de limite.

a) Fixons $\varepsilon > 0$, et résolvons $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| \leq \varepsilon$ pour n :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{n}\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} \leq n$$

On choisira donc $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$, où $\lceil x \rceil$ désote la partie entière supérieure¹ de x .

Vérifions maintenant que N est un seuil convenable pour la définition de limite : si $n \geq N$, alors

$$\begin{aligned} n \geq N &\implies n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon^2} \\ &\implies \varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt{n}} = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

1. $\lceil x \rceil$ est le plus petit nombre entier tel que $x \leq \lceil x \rceil$. Par exemple $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 3/2 \rceil = \lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil 14 \rceil = 14$, etc.

b) Fixons $\varepsilon > 0$ et résolvons $\left| \frac{n^3-1}{2n^3+1} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$ pour n :

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^3-1}{2n^3+1} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{-3}{2(2n^3+1)} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{2(2n^3+1)} \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2\varepsilon} \leq 2n^3+1 \Leftrightarrow \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon} \leq n^3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}} \leq n \end{aligned}$$

On choisira donc $N := \max \left\{ 1; \left\lceil \sqrt[3]{\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}} \right\rceil \right\}$ (pour assurer que $N \geq 1$ si ε est trop grand).

Vérifions maintenant que N est un seuil convenable pour la définition de limite : si $n \geq N$, alors

$$\begin{aligned} n \geq N &\implies n \geq \left\lceil \sqrt[3]{\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}} \right\rceil \geq \sqrt[3]{\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}} \\ &\implies \varepsilon \geq \frac{3}{2(2n^3+1)} = \left| \frac{n^3-1}{2n^3+1} - \frac{1}{2} \right| \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

c) Fixons $\varepsilon > 0$ et résolvons $\left| \frac{(-1)^n}{n^p} - 0 \right| \leq \varepsilon$ pour n :

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^p} - 0 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^p} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n^p \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^{1/p}} \leq n$$

On choisira donc $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^{1/p}} \right\rceil$, qui est bien défini, puisque $\varepsilon > 0$.

Vérifions maintenant que N est un seuil convenable pour la définition de limite : si $n \geq N$, alors

$$\begin{aligned} n \geq N &\implies n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^{1/p}} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon^{1/p}} \\ &\implies \varepsilon \geq \frac{1}{n^p} = \left| \frac{(-1)^n}{n^p} - 0 \right| \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.