EPFL — Lénaïc Chizat

Sections MX-EL-CGC — 14 octobre 2024

Analyse I – Série 5

Echauffement. (Infimum, Supremum)

Soit $a_n = \dfrac{5n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Soit $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Calculer

a) $\operatorname{Inf} A$ b) $\operatorname{Sup} A$

Sol.:

a) Afin de trouver $\operatorname{Inf} A$*, il suffit de remarquer que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante. En effet,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5\,(n+1)}{2\,(n+1)+1} - \frac{5n}{2n+1} = \frac{(5n+5)\,(2n+1) - 5n\,(2n+3)}{(2n+1)\,(2n+3)} = \frac{5}{(2n+1)\,(2n+3)} \geq 0$$

Ainsi, $\operatorname{Inf} A = \min a_n = a_0 = 0$.

b) Afin de trouver $\operatorname{Sup} A$*, nous pouvons remarquer que*

$$a_n = \frac{\frac{5}{2}\,(2n+1) - \frac{5}{2}}{2n+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2\,(2n+1)} \leq \frac{5}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et donc $a = \frac{5}{2}$ *est un majorant de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Il reste à montrer que* $a = \frac{5}{2}$ *est le plus petit des majorants, c.-à.-d.* $\forall\, \varepsilon > 0$*, il faut trouver* n_0 *tel que* $a_{n_0} > a - \varepsilon$*. Donc il faut trouver* n_0 *tel que*

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{2(2n_0+1)} > \frac{5}{2} - \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \varepsilon > \frac{5}{2(2n_0+1)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{5}\varepsilon > \frac{1}{2n_0+1} \quad\Leftrightarrow\quad 2n_0+1 > \frac{5}{2\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow\quad n_0 > \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\varepsilon} - 1\right).$$

Puisque le sous-ensemble des nombres naturels n'est pas majoré, on peut toujours trouver un tel $n_0 \in \mathbb{N}$*. Par exemple, on peut choisir*

$$n_0 = \max\left\{0, \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\varepsilon} - 1\right)\right\rfloor + 1\right\}$$

où $\lfloor x \rfloor$ *désigne le plus grand nombre entier inférieur où égal à* x*. Alors pour tout* $n > n_0$ *on a l'inégalité* $a_n > a - \varepsilon$*, ce qui montre que*

$$\operatorname{Sup} A = \frac{5}{2}.$$

Exercice 1. (Définition de la limite)
Soit (u_n) une suite de réels positifs vérifiant $u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$ pour tous $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Démontrer que (u_n) tend vers 0.

Sol. :
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_k$ tend vers 0, on peut trouver un entier K tel que $\frac{1}{K} \leq \varepsilon$. On en déduit que, pour tout entier n, on a $0 \leq u_n \leq \varepsilon + \frac{K}{n}$. Or, la suite $\left(\frac{K}{n}\right)_n$ tend vers 0, et on peut trouver un entier N tel que, pour $n \geq N$, on a $\frac{K}{n} \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout entier $n \geq N$, on a prouvé que

$$0 \leq u_n \leq 2\varepsilon$$

Cela montre que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 2. (Critères de convergence, cours)

(i) Montrer que toute suite convergente est bornée (sans regarder la preuve du cours !).
(ii) Soit (a_n) une suite. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ alors la suite est divergente.

Sol. :

(i) Vous pouvez maintenant regarder la preuve du cours.
(ii) (Démonstration par l'absurde). Supposons que la suite (a_n) est convergente, alors par (i) il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$. Soit $r > c$, alors si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq n_0$, $a_n \geq r$, en contradiction avec le fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$.

Exercice 3. (Lois algébriques, cours)

Montrer que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Sol. :
L'hypothèse $b \neq 0$ implique qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_1$, $|b_n - b| \leq \frac{1}{2}|b|$ et donc $\forall n \geq n_1$,

$$\frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{|b + b_n - b|} \leq \frac{1}{||b| - |b_n - b||} \leq \frac{1}{|b| - |b|/2} = \frac{2}{|b|}.$$

On a

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \frac{|(a_n - a)b - (b_n - b)a|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Or $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq n_1$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$\frac{2}{|b|}|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc $\forall n \geq n_0$, $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| \leq \varepsilon$.

Exercice 4. (Propriétés algébriques de la limite)

Soit $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{3} + \dfrac{3}{a_n}\right)$

Sol.:

a) La suite est croissante et bornée et on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \mathrm{Sup}\{a_1, a_2, \ldots\} = 3 \ .$$

On peut aussi utiliser les propriétés algébriques de la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{2}{n}} = \frac{3}{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{3}{1+2\cdot 0} = 3 \ .$$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3}$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n}\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{3}{3} = 2$

Intermezzo.

Les informations suivantes seront utiles pour les exercices qui suivent :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0\,,$ *pour tout* $p > 0$.
2) $1 \le \sqrt{1+x} \le 1 + \frac{1}{2}x\,,$ *pour tout* $x \ge 0$.
3) $1 + x \le \sqrt{1+x} \le 1 + \frac{1}{2}x\,,$ *pour* $-1 \le x \le 0$.

Démonstration :

1) *Il faut montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\frac{1}{n^p} \le \varepsilon$ *pour tout* $n \ge n_0$. *On peut par exemple choisir*

$$n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \right\rfloor + 1 \ge \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \ ,$$

car on trouve pour $n \ge n_0$,

$$\frac{1}{n^p} \le \frac{1}{n_0^p} \le \varepsilon \ .$$

2) *Pour* $x \ge 0$ *on a*

$$1 \le \sqrt{1+x} \le \sqrt{1 + x + \frac{1}{4}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x \ .$$

3) *Pour* $-1 \le x \le 0$ *on a* $0 \le 1 + x \le 1$ *et donc* $(1+x)^2 \le 1 + x$ *. Donc*

$$1 + x \le \sqrt{1+x} \le \sqrt{1 + x + \frac{1}{4}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x \ .$$

Exercice 5. (Existence de limites)

Déterminer, si elle existe, la limite $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec

a) $a_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$ b) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$ c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$

Indication: Pour c), on pourra utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante : $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ $\forall x \geq 0$,.

Sol.:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - 3\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{5 - 3\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{3 + 7 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{3}$$

b) On a

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = 0 \ ,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 0 \ .$$

c) On a

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} \leq 1 + \frac{1}{n^2} \qquad \overset{[Th2G]}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = 1 \ ,$$

où [Th2G] dénote « par le théorème des deux gendarmes ». Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \ .$$

Remarque :
Nous allons voir plus tard que l'on peut « échanger » la racine et la limite, ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}}{2n} = \frac{\sqrt{1 + 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Exercice 6. (Propriétés des suites)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (a_n) est monotone ; trouver, s'il existe, le supremum et l'infimum de la suite et décider s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

a) $a_n = n^2 - 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}$ b) $a_n = \dfrac{n}{3n-1},\ n \in \mathbb{N}^*$ c) $a_n = \dfrac{n}{3n-1},\ n \in \mathbb{N}$

Sol.:

a) On a $a_n = (n-2)^2 - 3$ *. Calculons les premiers termes de la suite :*

$$a_0 = 1,\;\; a_1 = -2,\;\; a_2 = -3,\;\; a_3 = -2,\; \ldots$$

La suite n'est donc pas monotone car par exemple $a_1 > a_2$ *et* $a_2 < a_3$*. Pour* $n \geq 2$*, on a par contre*

$$a_n = (n-2)^2 - 3 \leq (n-1)^2 - 3 = a_{n+1}\ ,$$

c.-à.-d. la suite est croissante pour $n \geq 2$*.*
Donc on a

$$\operatorname{Inf} a_n = \min a_n = -3\ .$$

Pour $n \geq 2$ *on a*

$$a_{n+1} - a_n = (n-1)^2 - (n-2)^2 > 1,$$

alors la suite $\{a_n\}$ *croît plus vite que les nombres naturels, et donc* $\{a_n\}$ *n'est pas majoré. Ainsi* $\operatorname{Sup}(a_n)$ *et a fortiori* $\max(a_n)$ *n'existent pas.*

b) On a

$$a_n = \frac{n}{3n-1} = \frac{\frac{1}{3}(3n-1) + \frac{1}{3}}{3n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n-1)}$$

On procède ensuite comme dans l'exercice précédent pour montrer que la suite est décroissante :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{3(3(n+1)-1)} - \frac{1}{3(3n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{3n-1-(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)}\right) \\ &= -\frac{1}{(3n+2)(3n-1)} < 0\, \forall n \in \mathbb{N}^*\ . \end{aligned}$$

Il s'en suit que $\operatorname{Sup} a_n = \max a_n = a_1 = \frac{1}{2}$*. De plus on a vu que*

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n-1)}\ ,$$

donc (a_n) *est minorée par* $a = \frac{1}{3}$*. Pour montrer que* a *est le plus grand minorant de* (a_n)*, il faut montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $a_{n_0} < a + \varepsilon$*, où* $a = \frac{1}{3}$*. On écrit*

$$a_{n_0} < \frac{1}{3} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n_0-1)} < \frac{1}{3} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 3n_0 - 1 > \frac{1}{3\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n_0 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}.$$

En prenant n_0 *entier tel que*

$$n_0 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}\ ,$$

on a

$$a_{n_0} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(3\left(\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}\right) - 1\right)} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{3} + \varepsilon$$

et donc

$$\operatorname{Inf} a_n = \frac{1}{3}\ .$$

Notons encore que $\min (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *n'existe pas.*

c) Même question qu'en ii) sauf que l'on étudie ici $\{a_0 \cup (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$.
Comme $a_0 = 0$, *on a* $\min (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 = \min (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
De plus, la suite (a_n) *perd sa monotonie puisque* $a_0 < a_1$ *et* $a_1 > a_2$.
Enfin, l'on a toujours $\operatorname{Sup} a_n = \max a_n = a_1 = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. (Calcul de limites)

Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Indication : pour a), vous pouvez multiplier le numérateur et le dénominateur par la "quantité conjuguée" $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$ (c'est une astuce classique à maîtriser !).

Sol.:

a) On a

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \ , \end{aligned}$$

d'où $0 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, *et par le théorème des deux gendarmes on obtient que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) On a

$$0 \leq a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \cdots \left(\frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \ ,$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ *par le théorème des deux gendarmes.*

c) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ *on a*

$$\frac{2}{m} \leq 1 \ ,$$

et donc

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdots \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \leq \frac{2}{n} \cdot 2 \ ,$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$ *avec le théorème des deux gendarmes.*

Exercice 8.(*) (Fonction exponentielle)

À partir de la limite $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (admise), calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

Sol.: *Rappelons que* $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. *Alors* *a) En posant $m = n/2$, on a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e^2$ par la règle de la limite d'un produit de suites convergentes. En fait ce raisonnement ne permet de montrer que la convergence de la sous-suite formée des termes d'indice pair car pour n impair, $m = n/2$ n'est pas un entier (en fait, on le verra plus tard, ce raisonnement est valide en tant que limite de fonctions). Pour contourner ce problème, on peut réaliser le calcul plus astucieux suivant :*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}\right) = e^2 \ .$$

Pour trouver cette expression, il faut d'abord deviner la limite e^2 et "retravailler" l'expression de la suite de manière à faire apparaître un produit de 2 suites "ressemblant" à $u_n = (\frac{n+1}{n})^n$ (et potentiellement d'autres facteurs ayant pour limite 1) par exemple de la façon suivante :

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)u_{n+1}u_n.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\right) = \frac{1}{e} \ .$$

Comment aboutir à cette solution ? Par analogie avec le cas ci-dessus, on peut essayer de montrer que la limite est e^{-1}, et donc chercher à obtenir une suite "ressemblant" à $1/u_n$ en "retravaillant" l'expression, par exemple de la façon suivante :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{u_{n-1}}\cdot\frac{n-1}{n}.$$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$.

Exercice 9. (Croissance)

Pour chaque suite ci-dessous étudier sa croissance (c'est-à-dire, dire si elle est (strictement) croissante ou décroissante ou ni l'un ni l'autre). Pour les suites dépendant d'un paramètre, discuter des différents cas possibles.

a) $x_n = n^2 + 3n + 2$

b) $x_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

c) $x_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

d) $x_n = r^n$ (suite géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$)

e) $x_n = nr + b$ (suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ avec $b \in \mathbb{R}$)

f) x_n définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n - 3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g) x_n définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2\sqrt{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sol.:

a) Cette suite est strictement croissante. En effet $x_n = (n+1)(n+2)$ et donc $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+3}{n+1} > 1$.

b) Cette suite n'est ni croissante ni décroissante.

c) On regarde $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{3}{2} > 1$. Donc cette suite est strictement croissante.

d) Si $r < 0$ alors la suite n'est ni croissante ni décroissante. Si $r = 0$ la suite est constante. Si $0 < r < 1$ alors la suite est strictement décroissante. Si $r = 1$ la suite est constante. Si $r > 1$ alors la suite est strictement croissante.

e) Si $r = 0$ alors la suite est constante. Si $r < 0$ la suite est strictement décroissante et si $r > 0$ alors elle est strictement croissante.

f) Commençons par observer que $x_n > -3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ car $x_0 = 1$. Supposons l'assertion vraie pour n et montrons-la pour $n+1$. On a que $x_{n+1} = \frac{x_n - 3}{2} > \frac{-3-3}{2} = -3$. Étudions à présent la différence $x_{n+1} - x_n$. Un calcul nous donne

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - 3}{2} - \frac{2x_n}{2} = -\frac{x_n + 3}{2}$$

Comme $x_n > -3$ on a que $x_n + 3 > 0$ et par conséquent $x_{n+1} - x_n < 0$. Donc cette suite est strictement décroissante.

g) On calcule $x_{n+1} - x_n$ et on trouve $\frac{x_n^2+2}{2\sqrt{2}} - x_n = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2}{2\sqrt{2}} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \geq 0$. Ceci montre que la suite est croissante. On peut montrer de plus que $x_n < \sqrt{2}$ (par récurrence) et donc $x_{n+1} - x_n > 0$ siginifiant que la suite est strictement croissante.

Exercice 10. (V/F : suites)

Répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie. Soit (a_n) une suite numérique.

Q1 : Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.
FAUX : $a_n = (-1)^n$ est un contre-exemple.

Q2 : Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty}(a_n \sin(n)) = 0$.
VRAI : Comme $|\sin(n)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |a_n \sin(n)| = |a_n| \cdot |\sin(n)| \leq |a_n|,$$

ou

$$-|a_n| \leq a_n \sin(n) \leq |a_n|. \tag{1}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la suite des valeurs absolues $(|a_n|)$ converge aussi vers 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors par la convergence de (a_n) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

pour tout $n \geq n_0$, ce qui établit que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ également. Par le théorème des deux gendarmes appliqué à (1) on conclut alors que $\lim_{n\to\infty}(a_n \sin(n)) = 0$.

Q3 : Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.
FAUX : $a_n = 1$ est un contre-exemple ($a_n = 1/n$ en est un autre).

Q4 : Si (a_n) converge, alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
VRAI : Comme (a_n) converge, elle est bornée. Ainsi $\mathrm{Sup}A < \infty$ où $A = \{|a_0|, |a_1|, \ldots\}$, si bien que l'énoncé est vrai en prenant par exemple $\varepsilon = 1 + \mathrm{Sup}A$.

Q5 : Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|a_n - a| \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
VRAI Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ alors $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$. Ainsi la suite (b_n) définie par $b_n = a_n - a$ est bornée. En appliquant le raisonnement de la question précédente à la suite (b_n), on a le résultat voulu.

Exercice 11. (Suites adjacentes) Considérons les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

Montrer que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante et que $(u_n - v_n)$ tend vers 0. En déduire que la suite (u_n) converge (on pourra faire appel à un théorème du cours). (Nous verrons plus tard que $\lim_{n\to\infty} u_n = \exp(1)$.)

Solution.
La suite (u_n) est (strictement) croissante car $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) est (strictement) décroissante car

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs $v_n - u_n = 1/(nn!)$ donc $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to\infty}(1/n) \cdot \lim_{n\to\infty}(1/n!) = 0$. Par le théorème des suites adjacentes, il s'ensuit que (u_n) converge.