

Exercice (A déposer sur Moodle au plus tard le 17 octobre à 23h59).
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n+1} j 2^j = n 2^{n+2} + 2.$$

Partie I : Racines et polynômes complexes

Exercice 1.

Déterminer toutes les racines complexes suivantes et les représenter graphiquement.

- a) Les racines 5-èmes de 1.
- b) Les racines carrées de $-5 + 12i$
- c) Les racines 4-èmes de $-2i$
- d) Les racines cubiques de $-\sqrt{3} + i$

Exercice 2.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

- a) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$
- b) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Exercice 3.

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}$ et, si possible, dans $\mathbb{R}$.

- a) $p(z) = z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 2z + 10$ (trouver une racine simple)
- b) $p(z) = \frac{1}{2}z^3 - 4z^2 + 7z - 6$, ($p(6) = 0$)
- c) $p(z) = z^3 - (3 + 3i)z^2 + (-2 + 9i)z + 6$ ($p(3) = 0$)

Exercice 4.

Vrai ou faux ?

- a) Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.
- b) Soient $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$. Alors on a $\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n a_0$.
- c) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit purement imaginaire (c-à-d. sa partie réelle est nulle).
- d) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - i\sqrt{3})^n$ soit réel.

Partie II : Limites de suites.

Définition. On dit qu'une suite $(a_n)_{n=1}^\infty$ **converge** (ou **tend**) vers $L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \{n \geq N \implies |a_n - L| \leq \varepsilon\}.$$

On note alors

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ (quand } n \rightarrow +\infty).$$

Exercice 5.

Montrer à l'aide de la définition de la limite que :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 1}{2n^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \forall p > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = 0$$

Indications : 1) Il vous suffit de trouver un "seuil" $N \geq 1$ dépendant de ε qui satisfait la définition de limite.

2) On admettra sans démonstration que pour $p > 0$ (et donc en particulier pour $p = \frac{1}{2}$), la fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^p$ est strictement croissante. C'est-à-dire, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$. On aura les outils pour le montrer à la fin du chapitre 6.

Solutions.

1. a) $z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}, \quad z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}, \quad z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$
b) $z_0 = 2 + 3i, \quad z_1 = -2 - 3i.$
c) $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}, \quad z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}, \quad z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}$
d) $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{18}}, \quad z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{18}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{29\pi}{18}}$
2. a) $z_1 = -2 + 2i, \quad z_2 = -4 - 2i$
b) $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}},$
 $z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}, \quad z_4 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$
3. a) $p(z) = (z - i)(z + i)(z - 1 + 3i)(z - 1 - 3i) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 10)$
b) $p(z) = \frac{1}{2}(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z - 6) = \left(\frac{1}{2}z^2 - z + 1\right)(z - 6)$
c) $p(z) = (z - i)(z - 2i)(z - 3)$
4. Vrai, Vrai, Faux, Vrai.