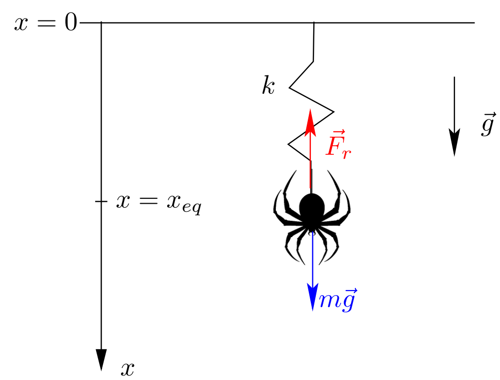
Corrigé 05 : Oscillateurs harmoniques

1 Araignée suspendue à un fil élastique

Vu depuis le référentiel de l'arbre, les positions sur l'axe Ox sont repérées par la coordonnée x comme indiqué sur le dessin.



a) Système étudié : l'araignée.

Forces qui agissent sur l'araignée de masse m :

$$\text{Pesanteur :} \quad m\vec{g} = mg\,\hat{e}_x. \tag{1}$$

$$\text{Force élastique du fil :} \quad \vec{F}_r = -k(x - L)\,\hat{e}_x, \tag{2}$$

où $\hat{e}_x$ indique un vecteur unitaire selon l'axe x.

La position d'équilibre est telle que $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$. Sa projection sur l'axe x donne

$$mg - k(x_{eq} - L) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = L + \frac{mg}{k}.$$

Remarque : il est possible de poser l'origine O à un point different, par exemple au point d'équilibre $x = L$ (appelons cet axe $O'x'$), ou encore au point $x = x_{eq}$ (appelons cet axe $O''x''$). Dans le premier cas, l'expression de la force élastique du fil va changer en $\vec{F}'_r = -k(x' - 0)\hat{e}'_x = -kx'\hat{e}'_x$. Dans le deuxième cas, la variation en x due au ressort sera $\Delta x'' = x'' - x''_0$ avec $x''_0 = -\frac{mg}{k}$ obtenu par le calcul de la position à vide du ressort relative à la position d'équilibre, et $\vec{F}''_r = -k(x'' - x''_0)\hat{e}''_x$. Ces repères sont exactement equivalents cependant les équations seront plus simples à écrire en placant l'origine au point d'attache du ressort.

b) L'équation du mouvement est donnée par la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Avec les forces énoncées plus haut et projetée sur $\hat{e}_x$, elle devient :

$$m\ddot{x} = -kx + kL + mg\ . \tag{3}$$

c) On sait que la solution générale de l'équation différentielle (3) est de la forme $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \bar{x}$. On la dérive deux fois pour obtenir la vitesse et l'accélération de l'araignée

$$\dot{x}(t) = v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{4}$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi). \tag{5}$$

En substituant les expressions de $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans (3) on trouve

$$-mA\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\phi)+kA\cos(\omega_0 t+\phi)+k\bar{x}-kL-mg=0 \tag{6}$$

$$\underbrace{\left(-m\omega_0^2+k\right)}_{=0}A\cos(\omega_0 t+\phi)+\underbrace{k\bar{x}-kL-mg}_{=0}=0. \tag{7}$$

Comme la relation (7) doit être vérifiée pour chaque t, les deux expressions soulignées doivent indépendamment s'annuler :

$$k\bar{x}-kL-mg=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{x}=\frac{mg}{k}+L \tag{8}$$

$$-m\omega_0^2+k=0 \quad\Rightarrow\quad k=m\omega_0^2 \quad\Rightarrow\quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9}$$

La quantité $\bar{x}$ représente donc la position d'équilibre de l'araignée, alors que ω_0 est bien la pulsation propre dont l'expression correspond à celle vue en cours pour un ressort de raideur k.

d) L'équation du mouvement est la même que dans la question a), (Eq. 3), mais avec un terme supplémentaire pour tenir compte des frottements. La projection de la force de frottement sur l'axe vertical est donnée par $F_x=-\eta\dot{x}$, et l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{x}=-kx+kL+mg-\eta\dot{x}\,. \tag{10}$$

e) Pour répondre à la question, il est nécessaire d'éliminer par un changement de variable les termes constants de l'équation du mouvement. Pour nous guider, l'équation du mouvement peut être récrite

$$\ddot{x}+\frac{\eta}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}\left(x-L-\frac{mg}{k}\right)=0\,. \tag{11}$$

Avec le changement de variable

$$z=x-L-\frac{mg}{k} \tag{12}$$

on a que $\dot{x}=\dot{z}$ et $\ddot{x}=\ddot{z}$, et l'équation du mouvement devient

$$\ddot{z}+\frac{\eta}{m}\dot{z}+\frac{k}{m}z=0\,. \tag{13}$$

On peut alors identifier les coefficients avec les paramètres γ et ω_0 définis au cours :

$$\gamma = \tfrac{\eta}{2m} \tag{14}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\tfrac{k}{m}}\,. \tag{15}$$

L'oscillation est sous-critique si $\gamma<\omega_0$, d'où on trouve la condition sur le paramètre η :

$$\frac{\eta}{2m}<\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad\Rightarrow\qquad \eta<2\sqrt{km}\,. \tag{16}$$

Remarque : puisque $F=\eta\dot{x}$, le paramètre η a comme unité des kilogrammes par seconde, [kg/s], *et l'on peut vérifier que le résultat ci-dessus est consistant car $\sqrt{km}$ a aussi l'unité de* [kg/s].

La pulsation effective de l'oscillation est

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\eta^2}{4m^2}}=\frac{\sqrt{4km-\eta^2}}{2m}\,. \tag{17}$$

f) Dans la solution générale de l'oscillateur harmonique amorti, l'amplitude est proportionnelle à $e^{-\gamma t}$. Au temps $t = 0$, ce facteur vaut 1. Il sera égale à $\frac{1}{2}$ au temps $t_{1/2}$, que l'on peut déterminer comme

$$e^{-\gamma t_{1/2}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad -\gamma t_{1/2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma} = \frac{m}{\eta} 2\ln 2\,. \tag{18}$$

Il reste donc maintenant à déterminer le nombre d'oscillations N durant un temps $t_{1/2}$: $N = t_{1/2}\,\nu_1$, où ν_1 est la fréquence effective de l'oscillation. Avec

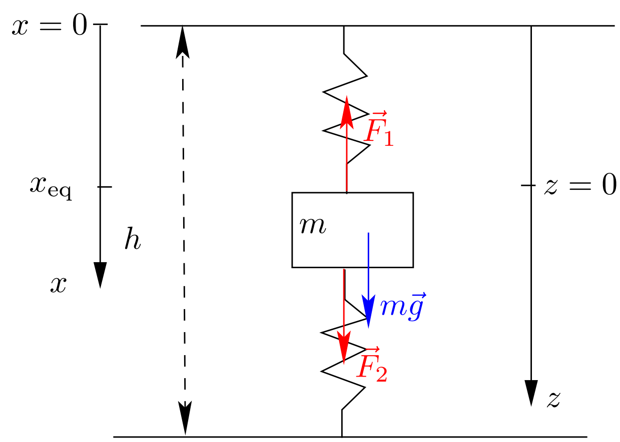
$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{4km-\eta^2}}{2m}\,, \tag{19}$$

on trouve finalement

$$N = t_{1/2}\,\nu_1 = \left(\frac{m}{\eta}2\ln 2\right)\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{4km-\eta^2}}{2m}\right) = \frac{\ln 2}{2\pi}\frac{\sqrt{4km-\eta^2}}{\eta}\,. \tag{20}$$

2 Oscillateur à deux ressorts

a) Les forces qui s'appliquent sur le bloc sont
- son poids $m\vec{g}$,
- la force exercée par le premier ressort
$$\vec{F}_1 = -k_1 x \hat{e}_x,$$
où $\hat{e}_x$ est un vecteur unitaire selon l'axe x,
- et la force exercée par le deuxième ressort
$$\vec{F}_2 = -k_2(x-h)\hat{e}_x.$$



b) L'équation du mouvement est la deuxième équation de Newton. En projection sur l'axe x, elle s'écrit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1 x + k_2(h-x) + mg \\ &= -(k_1+k_2)x + k_2 h + mg \\ m\ddot{x} &+ (k_1+k_2)x - (k_2h+mg) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Afin de montrer que l'équation (21) correspond à l'équation de l'oscillateur harmonique, on doit faire un changement de variable. Pour cela, on définit un axe z parallèle à l'axe x mais dont l'origine se trouve à la position d'équilibre. La position d'équilibre x_{eq} s'obtient en posant $x = x_{\mathrm{eq}}$ et $\ddot{x} = 0$ dans l'équation (21). On obtient ainsi $x_{\mathrm{eq}} = \frac{k_2h+mg}{k_1+k_2}$. Le changement de variable s'écrit :

$$z = x - x_{\mathrm{eq}} = x - \frac{k_2h+mg}{k_1+k_2} \qquad \Rightarrow \qquad x = z + \frac{k_2h+mg}{k_1+k_2} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = \ddot{z}.$$

On remplace dans l'équation (21) :

$$m\ddot{z} + (k_1+k_2)\left(z + \frac{k_2h+mg}{k_1+k_2}\right) - (k_2h+mg) = 0.$$

Après simplification des termes indépendants de z :

$$m\ddot{z} + (k_1 + k_2)z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{k_1 + k_2}{m} z = 0.$$

On reconnait l'équation de l'oscillateur harmonique dont la pulsation est donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \tag{22}$$

c) Pour le bloc, passer du plafond au point le plus bas consiste à effectuer une demi-période d'oscillation d'un mouvement harmonique, la durée de ce déplacement vaut

$$\Delta t_{x=x_{\max}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}},$$

où T est la période et ω_0 la pulsation de l'oscillateur.
En utilisant le résultat de la partie b), on sait que le point d'équilibre du bloc se trouve à

$$x_{\mathrm{eq}} = \frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2},$$

et que le mouvement est décrit par

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\mathrm{eq}}.$$

Au temps $t = 0$,

$$v(0) = \dot{x}(0) = 0 = -A\sin(\phi) \Rightarrow \phi = 0 \,\mathrm{ou}\, \pi \tag{23}$$
$$x(0) = x_0 = 0 = A\cos\underbrace{(\phi)}_{=\pi} + x_{\mathrm{eq}} \Rightarrow A = x_{\mathrm{eq}} - x_0\,, \tag{24}$$

où l'on a imposé que le bloc est lâché du plafond (correspondant à $\phi = \pi$) sans vitesse initiale, ce qui correspond à la position la plus éloignée du point d'équilibre. L'amplitude A vaut donc

$$A = x_{\mathrm{eq}} - x_0 = \frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2},$$

et le mouvement s'écrit :

$$x(t) = \left(\frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}t + \phi\right) + \frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2}.$$

Le maximum $x_{\max}$ de l'amplitude est atteint pour $\cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \phi\right) = 1$, d'où

$$x_{\max} = 2\frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2}.$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}
\Delta t_{x=x_{\max}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \quad &\simeq \quad \frac{3 \times (1 + 0.05)}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (1 + 0.05) \\
&\simeq \quad \frac{1.73}{2} \times (1 + 0.05) \\
&= \quad 0.86 \times (1 + 0.05) = 0.86 + 0.04 = 0.90\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

$$x_{\max} = 2\frac{20 \times 4 + 10 \times 10}{100 + 20} = 2 \times \frac{180}{120} = 2 \times \frac{3 \times \cancel{60}}{2 \times \cancel{60}} = 3 \text{ m}$$

Il est également possible de trouver le même résultat en utilisant la conservation de l'énergie. Toutes les forces s'appliquant sur le bloc sont conservatives ; elles dérivent d'énergies potentielles qui permettent de définir l'énergie mécanique totale du bloc comme

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x)^2 - mgx,$$

où v est la vitesse du bloc. L'énergie potentielle dans le champ de pesanteur vaut $-mgx$ car l'axe x est dirigé vers le bas.

Au départ, en $x = 0$ avec $v = 0$ on a

$$E_i = \frac{1}{2}k_2 h^2.$$

Au point le plus bas de la trajectoire (où $v = 0$ également), on a

$$E_f = \frac{1}{2}k_1 x_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x_{\max})^2 - mgx_{\max}.$$

Par conservation de l'énergie mécanique $E_i = E_f$:

$$\frac{1}{2}k_1 x_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x_{\max})^2 - mgx_{\max} = \frac{1}{2}k_2 h^2.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$x_{\max}\left[x_{\max}\frac{k_1 + k_2}{2} - (k_2 h + mg)\right] = 0.$$

Ses deux solutions sont les coordonnées des points où la vitesse est nulle, soit le point le plus haut de la trajectoire en $x = 0$ et le point le plus bas de la trajectoire en

$$x_{\max} = 2\frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2}.$$

3 Ressort dans une boîte

La condition pour que la boîte décolle est que la force de liaison avec la table s'annule. On va donc premièrement considérer le système de la boîte, et observer ce système depuis un référentiel lié à la table. Les forces qui s'appliquent sur la boîte sont :

— son poids $M\vec{g}$,
— la force $\vec{F}'_r$ exercée par le ressort sur la boîte, au point d'attache du ressort,
— et la force de soutien de la table $\vec{N}$ (force de liaison).

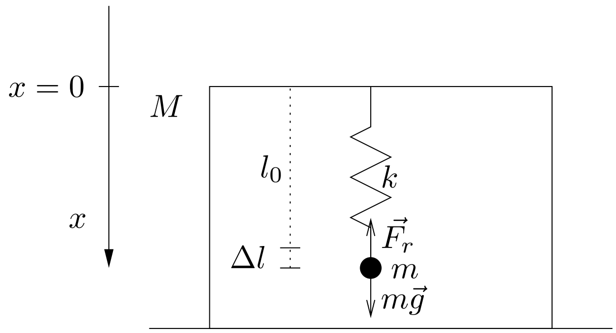
On choisit un axe x dirigé vers le bas avec son origine au point d'attache du ressort, et les forces s'écrivent alors

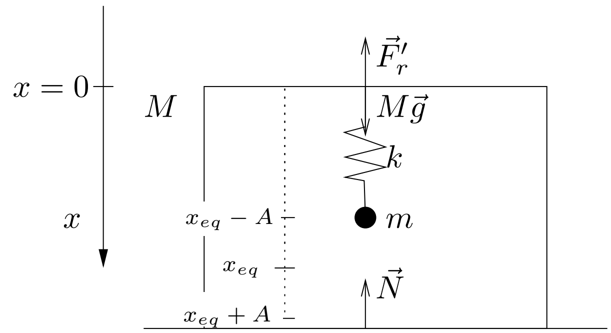
$$M\vec{g} = Mg\,\hat{e}_x\,, \tag{25}$$

$$\vec{F}'_r = -k(0 - (x - l_0))\,\hat{e}_x = k(x - l_0)\,\hat{e}_x\,, \tag{26}$$

$$\vec{N} = N_x\,\hat{e}_x\,, \tag{27}$$

où x est la coordonnée de la position de la bille, et N_x est la composante de la force de soutient sur l'axe x. Quand la boîte est posée sur la table, la projection N_x de la force de soutient est strictement negative (i.e. dirigée vers le haut). La boîte décolle si la table ne la soutient plus, autrement dit si la force de liaison devient nulle : $N_x = 0$.





La condition d'équilibre de la boîte (2ème loi de Newton avec accélération nulle) s'écrit :

$$\vec{F}'_r + M\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}. \tag{28}$$

En projetant la condition d'équilibre (28) sur l'axe x on obtient :

$$k(x - l_0) + Mg + N_x = 0, \tag{29}$$

et donc

$$N_x = -k(x - l_0) - Mg. \tag{30}$$

La condition $N_x < 0$ pour que la boîte ne décolle pas implique alors

$$x > l_0 - \frac{Mg}{k}. \tag{31}$$

Donc, la boîte décolle si

$$x \leq l_0 - \frac{Mg}{k}. \tag{32}$$

Pour relier cette position de la bille avec l'amplitude A de son oscillation, on considère maintenant le système de la bille, soumise à son poids, $m\vec{g} = mg\,\hat{e}_x$, et la force du ressort, $\vec{F}_r = -k(x - l_0)\,\hat{e}_x$. Son oscillation se fait autour de sa position d'équilibre x_{eq}, que l'on va maintenant chercher à déterminer. A l'équilibre (figure de gauche), la position de la bille est x_{eq}. La deuxième loi de Newton appliquée à la bille donne $\vec{F}_r + m\vec{g} = \vec{0}$. En projection sur l'axe x,

$$-k(x_{eq} - l_0) + mg = 0,$$

d'où

$$x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}. \tag{33}$$

Lorsqu'elle est en mouvement, la bille suit un mouvement oscillatoire harmonique. Elle effectue des oscillations d'amplitude A autour de la position d'équilibre x_{eq}. La figure de droite montre la position d'équilibre et les positions des maxima de l'oscillation à $x_{eq} - A$ et $x_{eq} + A$.
En combinant la condition donnée par l'équation (32) et le fait que $x \geq x_{eq} - A$ (la position x est toujours plus grande que la valeur minimale possible $x_{eq} - A$), l'amplitude A doit satisfaire

$$x_{eq} - A \leq x \leq l_0 - \frac{Mg}{k}, \tag{34}$$

d'où on trouve, en utilisant l'équation (33) :

$$A \geq \Delta l + \frac{Mg}{k} = \frac{(m + M)g}{k}. \tag{35}$$

Remarque : Un raisonnement plus court et intuitif permet de vérifier ce résultat. Pour une certaine amplitude A de l'oscillation, le force maximale exercée par le ressort sur la boîte est atteinte au sommet de la trajectoire de la bille. La longueur du ressort vaut alors $l_{\min} = x_{eq} - A = l_0 + \frac{mg}{k} - A$, et l'élongation vaut :

$$\Delta l = l_{\min} - l_0 = \frac{mg}{k} - A$$

Pour que la force sur la boîte soit dirigée vers le haut, il faut que le ressort soit comprimé, c'est à dire $\Delta l < 0$, d'où $\frac{mg}{k} - A < 0$ et ainsi en valeur absolue $|\frac{mg}{k} - A| = A - \frac{mg}{k}$. La norme de la force sur la boîte (dirigée vers le haut) est alors $k(A - \frac{mg}{k}) = kA - mg$, et la boite décolle si cette norme dépasse celle du poids de la boîte Mg (dirigé vers le bas) :

$$kA - mg \geq Mg \qquad \Rightarrow \qquad A \geq \frac{(m+M)g}{k}$$