Cours Euler: Corrigé 8

9 octobre 2024

Exercice 1

Une transformation du plan.

1. Vérifions que pour tout point $P \in \pi$, la correspondance f fait correspondre un seul point à P.
   - Si $P = A$, alors B est l'unique point que f fait correspondre à A par définition de f.
   - Si $P = B$, alors A est l'unique point que f fait correspondre à B par définition de f.
   - Si $P \neq A$ et $P \neq B$, alors P est l'unique point que f fait correspondre à P par définition de f.
2. Oui : Soient $P \neq Q$ deux points distincts du plan π. On a, sans perte de généralité, trois cas possibles :
   (a) $P \neq A$, $P \neq B$, $Q \neq A$ et $Q \neq B$. Alors $f(P) = P \neq Q = f(Q)$.
   (b) $P = A$ et $Q \neq B$. Alors $f(P) = B \neq Q = f(Q)$.
   (c) $P = A$ et $Q = B$. Alors $f(P) = B \neq A = f(Q)$.

   Les cas où $P = B$ se traitent de la même manière.
3. Oui : Si P est un point du plan, il y a 3 cas possibles :
   (a) $P \neq A$ et $P \neq B$. Alors P est l'image de P par f.
   (b) $P = A$. Alors P est l'image de B par f.
   (c) $P = B$. Alors P est l'image de A par f.
4. Remarquons que $f(f(P)) = P = f(f(P))$ pour tout point P du plan. Donc, f est son propre inverse.
5. Notons x la distance entre A et B :
   $$x = d(A, B).$$
   Soit P un point à distance $\frac{x}{4}$ du point A. Alors $P \neq A$, $P \neq B$ et $d(P, B) \geq \frac{3}{4}x$ par l'inégalité triangulaire. On a donc
   $$d(f(P), f(A)) = d(P, B) \geq \frac{3}{4}x > \frac{x}{4} = d(P, A).$$
   Alors f n'est pas une isométrie car $d(f(P), f(A)) \neq d(P, A)$.
6. L'image du segment $[AB]$ est encore le segment $[AB]$. En effet, tous les point du segment restent fixes sauf A et B, qui changent de place l'un avec l'autre.

Exercice 2

Une autre transformation du plan.

1. On peut écrire :

$$f: \ \pi \longrightarrow \pi$$
$$P \longmapsto \begin{cases} P & \text{si } O \text{ et } P \text{ sont du même côté de } d \\ (OP) \cap d & \text{si } O \text{ et } P \text{ ne sont pas du même côté de } d, \\ P & \text{si } P \in d. \end{cases}$$

   Il faut vérifier que pour tout point $P \in \pi$, la correspondence f fait correspondre un unique point à P.

   Dans les cas 1. et 3. de l'énoncé, le point P est l'unique point que f fait correspondre à P.

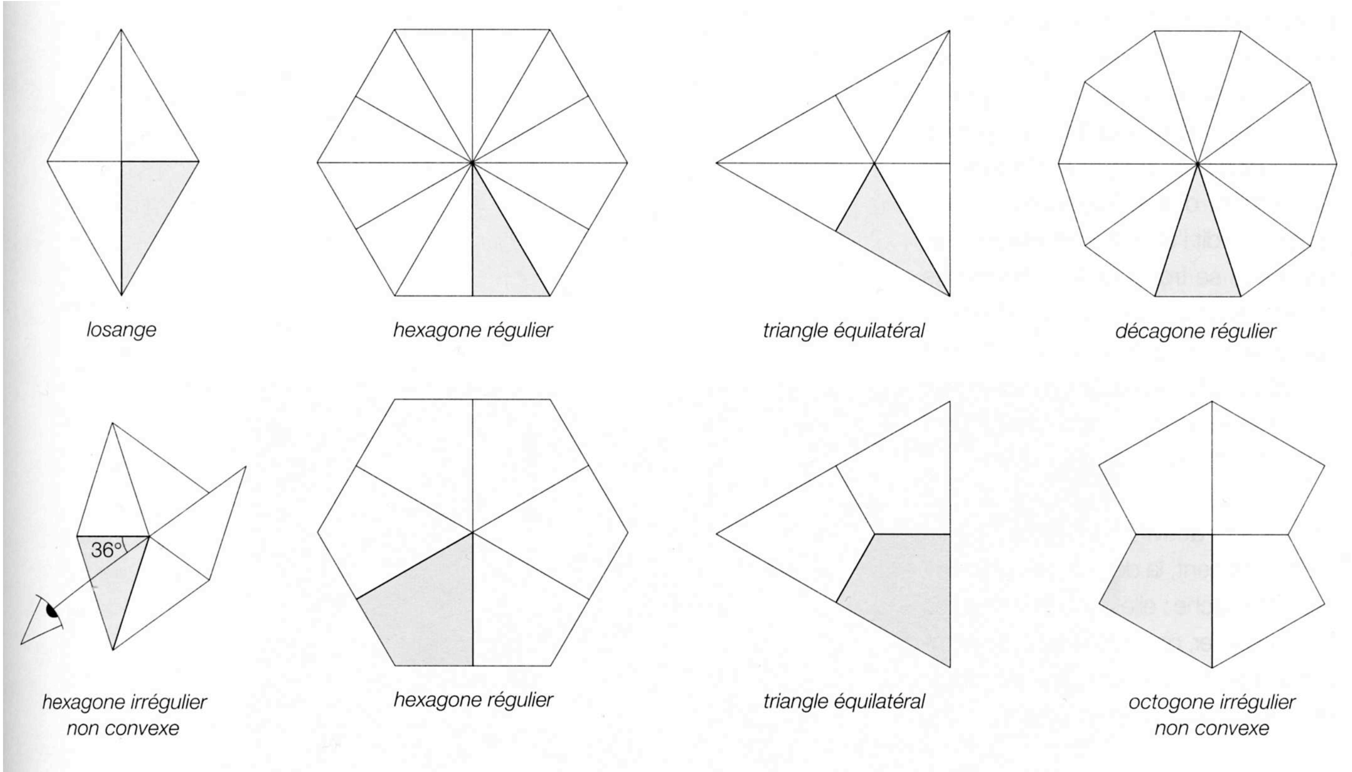
   Dans le cas 2. : Remarquons que $P \neq O$ car P et O ne sont pas du même côté. Nous devons montrer que l'intersection $(OP) \cap d$ contient exactement un point. Comme deux droites ont au plus un point en commun, il suffit de montrer que OP et d se coupent. Or, le segment $[OP]$ coupe d en un point par l'axiome du demi-plan.

2. Non : Remarquons que $f(f(P)) = f(P)$ pour tout point P du plan. Soit P un point qui n'est pas du même côté que O par rapport à P. Posons $Q = f(P)$. Alors Q et P sont distincts, car $Q \in d$, mais P n'appartient pas à d. Comme $f(P) = f(f(P)) = f(Q)$, la transformation f ne transforme pas deux points distincts en deux points distincts.
3. Non : Un point P de l'autre côté du point O par rapport à d n'est pas dans l'image de f.
4. La transformation f n'admet pas d'inverse.
5. Comme la transformation f n'admet pas d'inverse, elle n'est pas une isométrie.
6. Soient P et Q deux points distincts, et considérons le segment $[PQ]$. Enonçons tous les cas possibles :
   (a) P et Q sont dans le même demi-plan que O par rapport à d. Donc l'image par f de $[PQ]$ est $[PQ]$.
   (b) P est dans le même demi-plan que O par rapport à d, et Q ne l'est pas. Le segment $[PQ]$ coupe d en un point, qu'on note R. En cas où P appartient à la frontière d, on a $R = P$ et nous regardons « le segment » $[PR]$ comme un point.
      i. Si P, Q et O sont alignés, alors l'image par f est le segment $[PR]$. En effet, l'image par f d'un point sur le segment $[RQ]$ est R.
      ii. Sinon, l'image par f de Q est un point sur la droite d, qu'on note S. Donc l'image par f d'un point sur le segment $[RQ]$ est sur le segment $[RS]$. Finalement, on obtient que l'image par f de $[PQ]$ consiste en deux segments : les segments $[PR]$ et $[RS]$.
   (c) P et Q ne sont pas du même côté de O par rapport à d. Notons $R = f(P)$ et $S = f(Q)$. Alors l'image du segment $[PQ]$ par f est le segment $[RS]$. Il se peut que $R = S$. Dans ce cas on regarde le segment $[RS]$ comme un point.
7. Soit d' une droite du plan. On a plusieurs cas possibles :
   (a) Si d' est entièrement du même côté que O par rapport à d, alors tous les points de d' sont fixés par f (ceci peut se produire seulement si d et d' sont parallèles).
   (b) Si d' est parallèle à d mais elle n'est pas du même côté que O par rapport à d, alors l'image de d' est d.

(c) Si d' coupe d en un point P notons d'_1 la demi-droite contenue dans d' et dans le demi-plan du même côté que O par rapport d, et d'_2 l'autre demi-droite de d'. Soit encore p la parallèle à d' passant par O et Q le point d'intersection avec d. Si O est dans d', l'image de d' par f est d'_1 car l'image de d'_2 est le point P et d'_1 reste fixé par f. Sinon l'image d'un point de d'_2 se trouve sur le segment $[P, Q[$. L'image de d' est dans ce cas l'union de d'_1 et de $[P, Q[$.

Exercice 3

On obtient les figures suivantes :



Exercice 4

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Les lettres A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X et Y admettent un axe de symétrie.
Les lettres H, I, O et X admettent au moins 2 axes de symétrie.

Exercice 5

La contraposée. On doit montrer que si C est un point qui ne se trouve pas sur la droite AB, alors $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AB}$. La contraposée de cette affirmation est la suivante :

$$\text{« Si } \overline{AB} \geq \overline{AC} + \overline{CB}, \text{ alors } C \in AB. \text{ »}$$

C'est cette contraposée que nous allons prouver maintenant. On constate d'abord par l'inégalité triangulaire $(D3)$ que, si $\overline{AB} \geq \overline{AC} + \overline{CB}$, alors

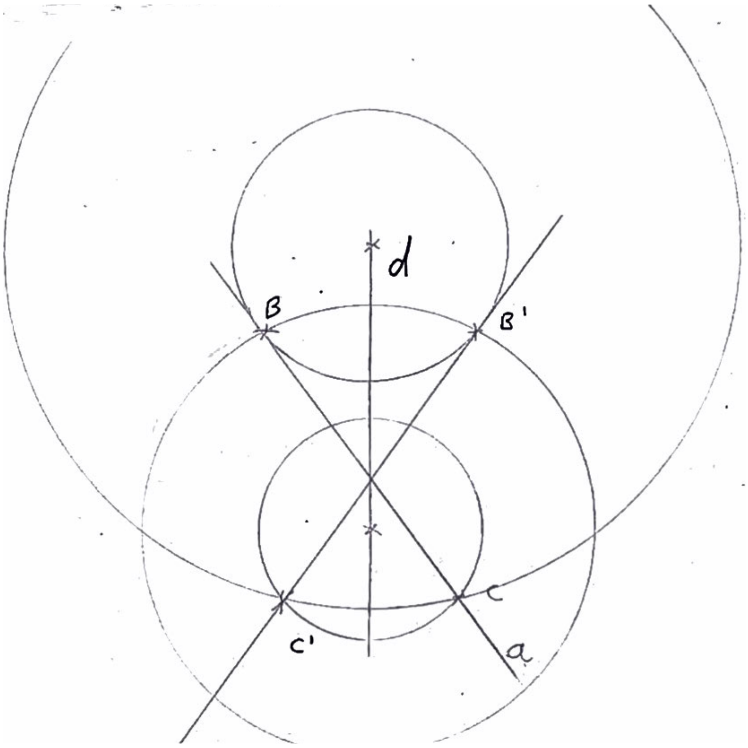
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

(il n'est pas possible que $\overline{AB} > \overline{AC} + \overline{CB}$). On applique maintenant l'axiome ($D4$) qui affirme que l'égalité $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ est vérifiée si et seulement si C appartient au segment $[AB]$. En particulier C se trouve sur la droite AB. La démonstration est terminée.

Exercice 6

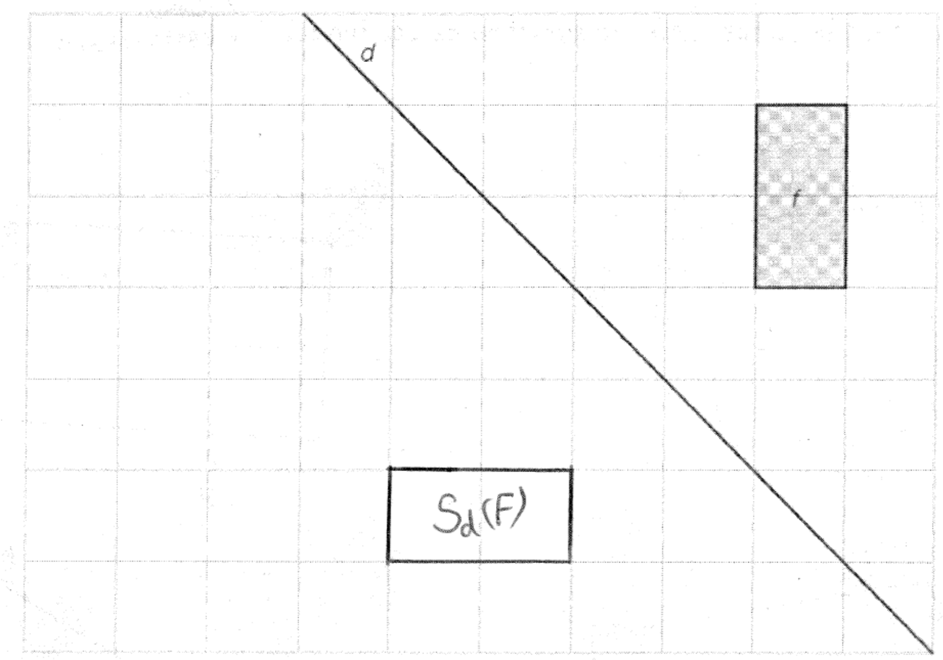
Voici une marche à suivre (construction ci-dessous) :

1. Choisir deux points distincts B et C sur a ;
2. Construire le symétrique B' du point B sous S_d ;
3. Construire le symétrique C' de C sous S_d ;
4. Tracer la droite $B'C'$, c'est l'image de a sous S_d.

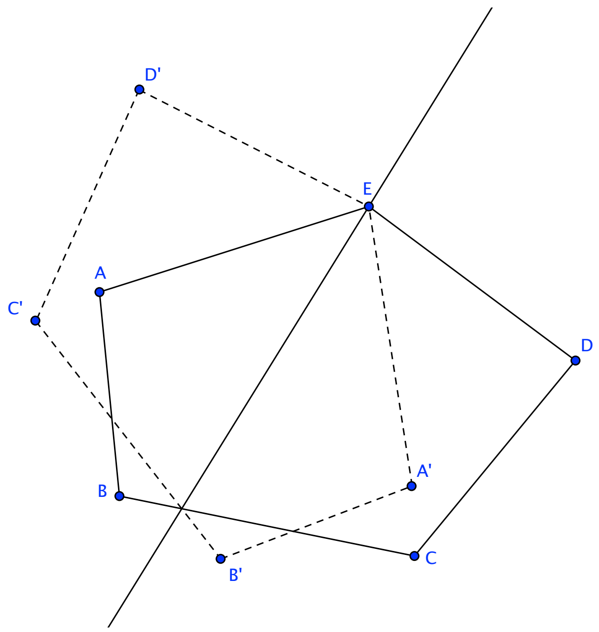


Cette construction marche dans tous les cas. Néanmoins, si a et d se coupent dans un point P, c'est avantageux de choisir $B = P$ car le symétrique de P sous S_d est P. En particulier si $a = d$, alors a est l'image de a sous la symétrie d'axe d et il n'y a rien à faire.

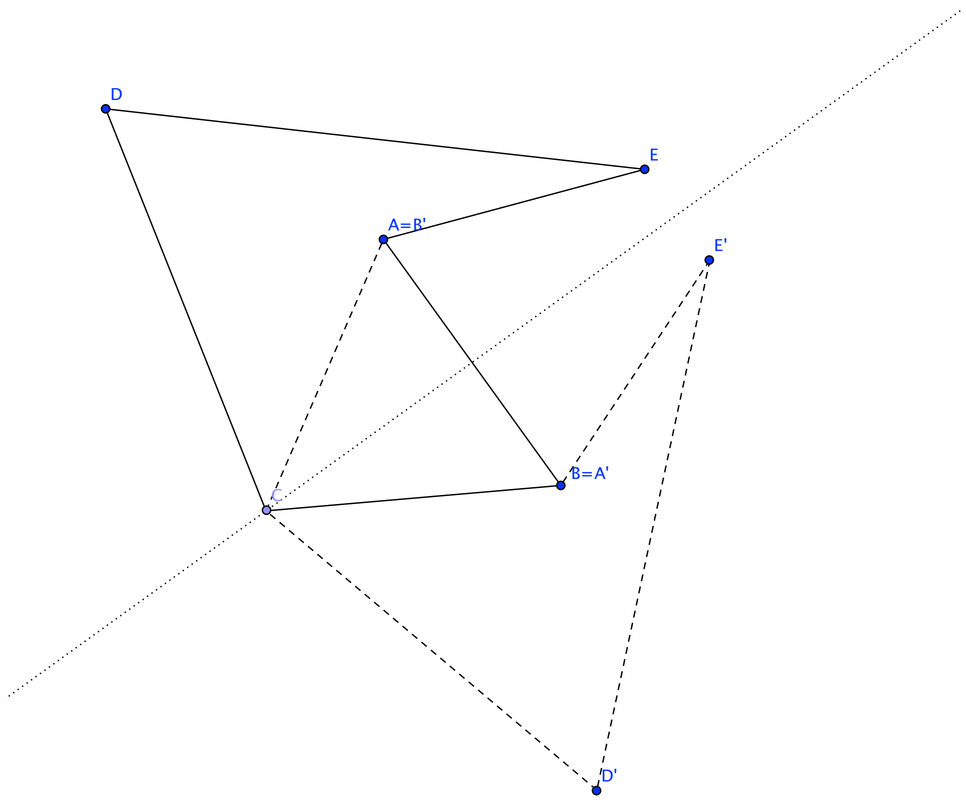
Exercice 7



On montre l'image du pentagone $ABCDE$ par la symétrie d'axe d en traitillé :



L'axe de symétrie, indiqué en pointillé, est la médiatrice du segment $[AB]$ puisque A est l'image de B et vice-versa. L'image du pentagone est indiquée en traitillé.



Exercice 8

1) Si A et B sont sur d, alors la figure admet une infinité d'axes de symétrie, car n'importe quel axe perpendiculaire à d est un axe de symétrie, ce qui entre en contradiction avec la donnée. Donc A et B ne peuvent pas être tous les deux sur d.

   Si A est sur d mais pas B, alors il y a un unique axe de symétrie : cet axe est la droite perpendiculaire à d passant par B. Donc nécessairement A et B sont tous les deux hors de d.

   Si A et B sont dans le même demi-plan défini par d, alors la figure admet au plus un axe de symétrie : si la droite passant par A et B est parallèle à d, alors l'axe de symétrie est la médiatrice du segment $[AB]$. Si B se trouve sur la droite perpendiculaire à d passant par A, alors l'axe de symétrie est cette perpendiculaire. Sinon il n'y a pas d'axes de symétrie.

   Si A et B sont dans deux demi-plans distincts et ne sont pas sur d, alors il y a exactement deux axes de symétrie si et seulement si B est sur la perpendiculaire d passant par A et A et B sont à la même distance de d. Le premier axe est cette perpendiculaire, le second est d (qui est alors la médiatrice du segment $[AB]$).

   Finalement, on se trouve nécessairement dans le cas où A et B sont dans deux demi-plans distincts et ne sont pas sur d, et B est sur la perpendiculaire d passant par A et A et B sont à la même distance de d.

2) Ces points forment un triangle isocèle, mais non équilatéral. Si ce triangle est équilatéral, alors il y aurait 3 axes de symétrie.

3) Dans le cas le plus général (i.e. quand ABC est un triangle quelconque), il faut que D soit l'image de C par la symétrie d'axe AB. Par construction, la figure admet la droite passant par AB comme axe de symétrie. Si ABC possède déjà un axe de symétrie, alors cet axe n'est pas toujours un axe de symétrie de $ABCD$. Il en est un si la droite passant par AB est perpendiculaire à l'axe de symétrie de ABC.

Exercice 9

1) Soit O le centre du cercle Γ et notons r le rayon de Γ. Soit d un diamètre de Γ. Par définition, $S_d(\Gamma)$ est l'image de Γ par rapport à la symétrie d'axe d : $S_d(\Gamma) = \{S_d(P) | P \in \Gamma\}$.
   Montrons que $S_d(\Gamma) \subset \Gamma$. Soit $P \in S_d(\Gamma)$. Alors il existe $Q \in \Gamma$ tel que $S_d(Q) = P$. Par définition, S_d laisse fixe tous les points de d donc $S_d(O) = O$. Comme S_d est en particulier une isométrie, on a
   $$r = d(Q, O) = d(S_d(Q), S_d(O)) = d(P, O).$$
   Donc $P \in \Gamma$. On a montré $P \in S_d(\Gamma) \Longrightarrow P \in \Gamma$, d'où $S_d(\Gamma) \subset \Gamma$.
2) *Montrons que* $\Gamma \subset S_d(\Gamma)$. Soit $P \in \Gamma$. On a vu au cours qu'étant donné une isométrie f, tout point S du plan est l'image d'un point du plan sous f. En particulier, appliquant ceci à la symétrie S_d et au point P, on obtient qu'il existe un point R du plan tel que $P = S_d(R)$. Il reste à montrer que $R \in \Gamma$. Utilisant le fait que S_d est une isométrie et que $S_d(O) = O$ (car $O \in d$), on a
   $$r = d(P, O) = d(S_d(R), S_d(O)) = d(R, O).$$
   Donc $R \in \Gamma$. On a alors $P \in S_d(\Gamma)$. On a montré $P \in c \Longrightarrow P \in S_d(\Gamma)$, d'où $\Gamma \subset S_d(\Gamma)$.
3) Par les deux points précédents, $S_d(\Gamma) \subset \Gamma$ et $\Gamma \subset S_d(\Gamma)$, donc $S_d(\Gamma) = \Gamma$.