

Cours Euler: Série 8

8 octobre 2025

Exercice 1

Une transformation du plan. Considérons deux points distincts A et B du plan. On définit une correspondance f du plan dans lui-même de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A &\mapsto B \\ B &\mapsto A \\ P &\mapsto P \text{ si } P \neq A \text{ et } P \neq B \end{aligned}$$

- 1) Vérifie que cela définit une transformation $f : \Pi \rightarrow \Pi$ du plan.
- 2) Est-ce que cette transformation transforme deux points distincts en deux points distincts (f est-elle injective) ? Explique !
- 3) Est-ce que tout point du plan est l'image d'un point du plan (f est-elle surjective) ? Explique !
- 4) Si la réponse aux deux dernières questions est positive, alors il existe un inverse. Décris cette transformation si elle existe.
- 5) Montre que f n'est pas une isométrie.
- 6) Quelle est l'image du segment $[AB]$ par f ?

Exercice 2

Une autre transformation du plan. On donne une droite d et un point O non situé sur d . On considère la correspondance f du plan définie ainsi :

- i) Si O et P sont du même côté de d , $f(P) = P$.
 - ii) Si O et P ne sont pas du même côté de d , $f(P)$ est l'intersection de OP avec d .
 - iii) Si P est sur d , $f(P) = P$.
- 1) Vérifie que cela définit une transformation $f : \Pi \rightarrow \Pi$ du plan.
 - 2) Est-ce que cette transformation transforme deux points distincts en deux points distincts (f est-elle injective) ? Explique !
 - 3) Est-ce que tout point du plan est l'image d'un point du plan (f est-elle surjective) ? Explique !
 - 4) Si la réponse aux deux dernières questions est positive, alors il existe un inverse. Décris cette transformation si elle existe.

- 5) Montre que f n'est pas une isométrie.
- 6) Quelle est l'image d'un segment par f ? (Examine différents cas possibles.)
- 7) Quelle est l'image d'une droite par f ? (Examine différents cas possibles.)

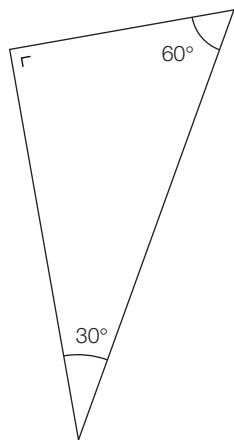
Exercice 3**140. Rompre la glace**

Place deux miroirs verticalement le long de deux côtés adjacents d'un de ces polygones.

Construis la figure que tu as obtenue.

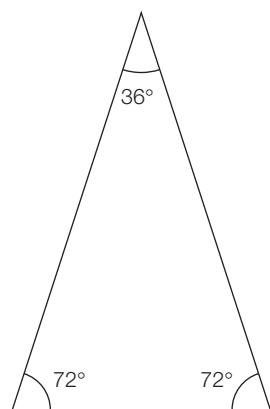
Et si tu choisis un autre polygone, arrives-tu à prévoir la figure que tu obtiendras?

Essaie de la construire, puis vérifie.



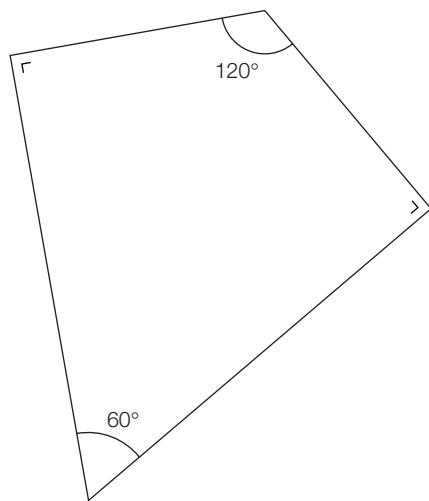


140. Rompre la glace (suite 1)





140. Rompre la glace (suite 2)



Exercice 4

Ecris les lettres de l'alphabet en majuscules droites. Parmi ces lettres, lesquelles admettent un axe de symétrie ? Existe-t-il des lettres qui admettent deux axes de symétrie ou plus ?

Exercice 5

La contraposée. Soient A et B deux affirmations. La *contraposée* de l'affirmation « $A \implies B$ » est l'affirmation « non $B \implies$ non A ». Cette affirmation est équivalente à la première. En effet, supposons que A implique B . Alors, si « non B » est vraie, c'est-à-dire, si B est fausse, A ne peut être vraie puisqu'elle impliquerait B ! Ainsi « non B » implique « non A ».

En cours nous avons montré qu'une isométrie fait correspondre à deux points distincts deux points distincts en prouvant la contraposée de cette affirmation : si deux points ont la même image, alors ils sont égaux.

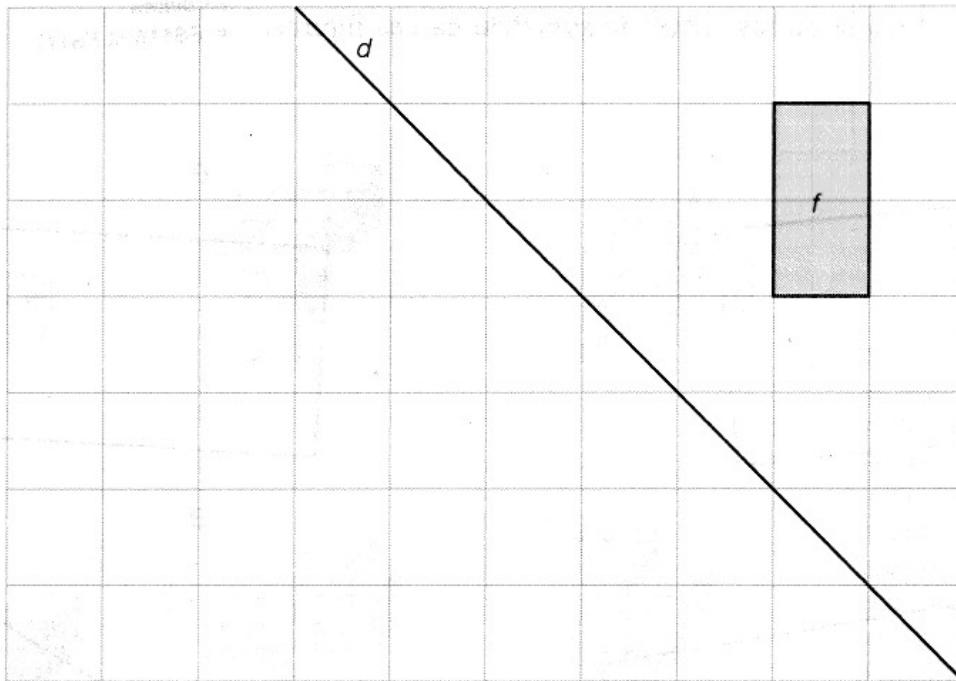
Démontre à l'aide des axiomes de la distance que si C est un point qui ne se trouve pas sur la droite AB , alors $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AB}$. Tu démontreras cela *en prouvant la contraposée* que je te laisse le soin de traduire en langage mathématique : « Si la somme des distances de A à C et de C à B n'est pas plus grande que la distance de A à B , alors forcément C appartient à la droite passant par A et B ».

Exercice 6

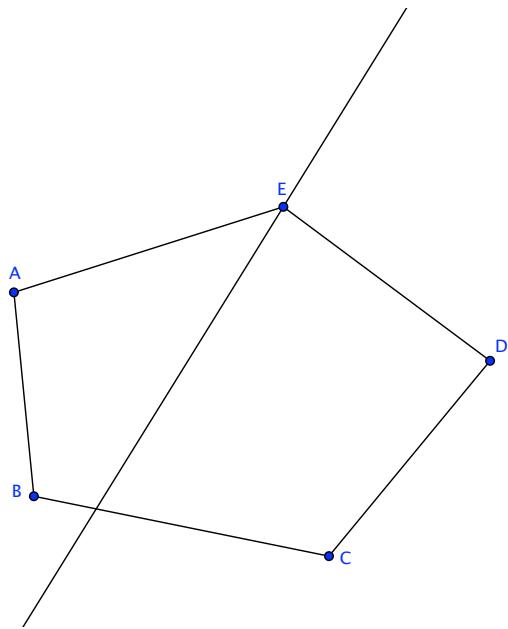
Construis l'image d'une droite a donnée sous la symétrie d'une droite d . Donne une marche à suivre. Différencie les cas selon la position relative des droites. Pour la marche à suivre, on suppose connue la construction du symétrique d'un point.

Exercice 7

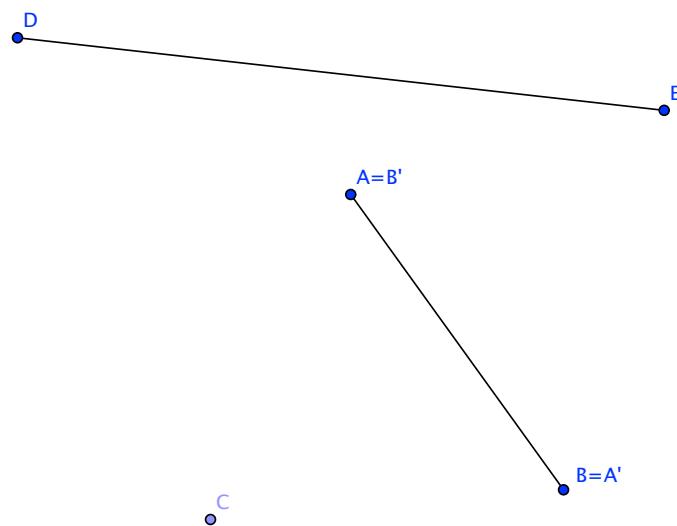
2) a) Construis l'image f' de la figure f par une symétrie d'axe d .



Construis l'image du pentagone $ABCDE$ par la symétrie d'axe d :



L'image du pentagone $ABCDE$ est un pentagone $A'B'C'D'E'$ par une symétrie axiale dont tu dois déterminer l'axe. Complète la figure et construis son image.



Exercice 8

- 1) Une figure formée d'une droite d et de deux points distincts A et B admet exactement deux axes de symétrie. Que peut-on dire au sujet de cette figure ?
- 2) Trois points non alignés forment une figure admettant un axe de symétrie unique. Préciser leurs positions respectives.
- 3) On donne trois points non alignés A, B, C . Où placer un quatrième point D de façon que la figure $ABCD$ admette un axe de symétrie ?

Exercice 9

Montrer que tout diamètre d d'un cercle Γ est un axe de symétrie de ce cercle. On doit donc montrer que $S_d(\Gamma) = \Gamma$. *Relis bien la définition d'une symétrie axiale.* Suis les étapes suivantes :

- 1) Montrer que $S_d(\Gamma) \subset \Gamma$.

Indication. Quelle est la propriété commune de tous les points du cercle ?

- 2) Montrer que $\Gamma \subset S_d(\Gamma)$.

Indication. On a vu au cours que, étant donné une symétrie f , tout point du plan est l'image d'un point du plan sous f . Applique ceci à la symétrie S_d et aux points du cercle Γ).

- 3) Concluez la preuve de l'affirmation.